现代应用数学丛书

# 粘性流体理论

〔日〕谷一郎 著

上海科学技术出版社

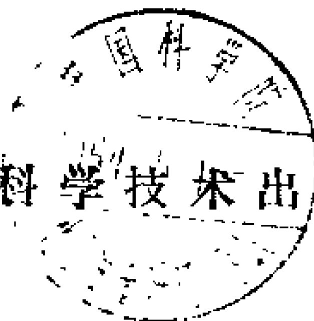
52.73
301

现代应用数学丛书

# 粘性流体理論

〔日〕谷 一郎 著
刘 亦 珩 譯
欧阳鬯 張开明 校

ZK551/33



上海科学技术出版社

## 內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本。以不多的篇幅，扼要地介紹了粘性流体力学的基本理論，第1章介紹流体运动基本方程，討論了它的适用范圍和某些准确解；第2章对 Reynolds 数小而粘性大的流体，討論了方程的近似解以及提高近似程度的方法；第3章介紹边界层方程的准确解和近似方法；第4章研究流动稳定性的小扰动理論。

本书可供綜合性大学或工科大学力学专业流体力学和数学专业連續介质力学师生作参考。

現代应用数学丛书

**粘 性 流 体 理 论**

原 书 名　粘性流体の理論
原 著 者　〔日〕谷　一　郎
原出版者　岩 波 书 店 1957
譯　　者　刘　亦　珩
校　　者　欧阳亹　張开明

*

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
上海市书刊出版业营业許可証出093号
新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售
商务印书館上海厂印刷

*

开本 850×1168 1/32　印張 3 24/32　字数 87,000
1962年5月第1版　1963年7月第2次印刷
印数 5,001—6,100

統一书号：13119・460
定　　价：（十四）0.66元

# 出版説明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"現代应用数学讲座"翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其内容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地減少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注釋和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

07009

# 現代应用数学丛书

| 书名 | 原作者 | 譯者 |
| --- | --- | --- |
| 代数学* | 弥永昌吉等 | 熊全淹 |
| 几何学* | 矢野健太郎 | 孙澤瀛 |
| 复变函数論* | 功力金二郎 | 刘书琴 |
| 集合·拓扑·测度* | 河田敬义 | 輕英华 |
| 泛函分析* | 吉田耕作 | 程其襄 |
| 广义函数* | 岩村联 | 楊永芳 |
| 常微分方程* | 福原满洲雄 | 張庆芳 |
| 偏微分方程* | 南云道夫 | 錢端壮 |
| 特殊函数* | 小谷正雄等 | 錢端壮 |
| 差分方程* | 福田武雄 | 穆鴻基 |
| 富里哀变换与拉普拉斯变换* | 河田龙夫 | 錢端壮 |
| 变分法及其应用* | 加藤敏夫 | 周怀生 |
| 李群論* | 岩堀长庆 | 孙澤瀛 |
| 随机过程* | 伊藤清 | 刘璋温 |
| 回轉群与对称群的应用* | 山內恭彥等 | 張質賢 |
| 結晶統計与代数* | 伏見康治 | 孙澤瀛 |
| 偏微分方程的应用 | 犬井鉄郎等 | 楊永芳 |
| 微分方程的近似解法 | 加藤敏夫等 | 王占瀛 |
| 数值計算法* | 森口繁一等 | 閻昌龄 |
| 量子力学中的数学方法* | 朝永振一郎 | 周民强 |
| 工程力学系統* | 近藤一夫等 | 刘亦珩 |
| 非綫性振动論* | 古屋茂 | 吕紹明 |
| 力学系与映射理論* | 岩田义一 | 孙澤瀛 |
| 平面彈性論* | 森口繁一 | 刘亦珩 |
| 有限变位彈性論* 变形几何学 | 山本善之 近藤一夫 | 刘亦珩 |
| 塑性論* | 鷲津久一郎 | 刘亦珩 |
| 粘性流体理論* | 谷一郎 | 刘亦珩 |
| 可压縮流体理論* | 河村龙馬 | 刘亦珩 |
| 网絡理論* | 喜安善市等 | 陆志刚 |
| 自动控制理論* | 喜安善市等 | 瞿立林 |
| 网絡拓扑学* | 近藤一夫 | 張設 |
| 信息論* | 喜安善市等 | 李文清 |
| 推断統計过程論 | 北川敏男 | 刘璋温 |
| 統計分析* | 森口繁一 | 刘璋温 |
| 試驗設計法* | 增山元三郎 | 刘璋温 |
| 群体遺傳学的数学理論* | 木村資生 | 刘祖洞 |
| 博奕論* | 官澤光一 | 張毓樺 |
| 綫性規划* | 森口繁一等 | 刘源張 |
| 經济理論中的数学方法* | 安井琢磨等 | 談群柏 |
| 随机过程的应用* | 河田龙夫 | 刘璋温 |
| 計算技术 | 高桥秀俊 | 姚晋 |
| 穿孔卡計算机 | 森口繁一 | 刘源張 |

注：有*者已經出版

0093.0

# 目　　录

# 第1章 Navier-Stokes 方程

## §1 流体运动方程

流体力学将流体看作連續介质加以处理，而不管分子构造所呈現的不連續性。用各点的密度、压力、温度及速度来記述連續介质的状态，这些量之間有下面各关系式成立。在一般情形的叙述里将采用張量記号。設点的直交坐标是 $x_i(x_1, x_2, x_3)$，时間是 $t$，則密度 $\rho$，压力 $p$，温度 $T$ 及速度分量 $u_i(u_1, u_2, u_3)$ 各看作 $x_i$ 及 $t$ 的函数。但处理具体問題时，各用 $(x, y, z)$ 及 $(u, v, w)$ 代替 $(x_1, x_2, x_3)$ 及 $(u_1, u_2, u_3)$ 較为便利，但須看具体情况而定。

**状态方程** 在静止气体的密度、压力及温度間有由实驗求得的一种关系，即所謂"状态方程"成立。对于空气及其他普通气体❶，可以假定理想气体的状态方程为

$$p = \Re\rho T. \tag{1.1}$$

这里 $\Re$ 叫作"气体常数"。更由气体分子运动論可知，当气体作运动时(1.1)也成立。基于这个保証，我們将采用(1.1)为状态方程。

**連續方程** 取直交坐标为 $x_i$ 的点 $P$ 作中心，考虑具有平行于坐标軸的棱的微小六面体，运用质量守恒定律。单位体积的质量增加 $\partial\rho/\partial t$ 必須等于通过六个面在单位时間内流入的质量

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)❷,$$

---

❶ 特别地，不考虑高压的气体或者具有复杂分子构造的气体（还不考虑低温下的气体——校者注）。

❷ 当一项内有重复两次的标数出現时，我們規定应就該标数所能取的值作总和，所以 $(\partial/\partial x_i)(\rho u_i) = (\partial/\partial x_1)(\rho u_1) + (\partial/\partial x_2)(\rho u_2) + (\partial/\partial x_3)(\rho u_3)$，以下准此。

所以

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)=0. \tag{1.2}$$

这就是"連續方程"❶。若用流体微团的微分記号

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u_i\frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{1.3}$$

則(1.2)可写成

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0. \tag{1.4}$$

**应力与变形速度**　設 $P$ 点的速度分量是 $u_i$，其邻域内一点 $x_i+\delta x_i$ 的速度分量是 $u_i+\delta u_i$，則 $\delta u_i$ 为

$$\delta u_i=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\delta x_j=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega_j\delta x_k+\frac{1}{2}e_{ij}\delta x_j. \tag{1.5}$$

但

$$\omega_i=\varepsilon_{ijk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j},\qquad e_{ij}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \tag{1.6}$$

这里 $\varepsilon_{ijk}$ 表示单位斜称張量，当 $i$, $j$, $k$ 都不相等时 $\varepsilon_{ijk}=+1$ 或 $-1$($\varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=+1$，$\varepsilon_{132}=\varepsilon_{213}=\varepsilon_{321}=-1$)，不这样时就等于零。$\omega_i$ 叫作"旋度"(或渦量)，是一个向量的分量，表示以 $P$ 为中心的微团繞平行于 $x_i$ 軸的軸旋轉的角速度的二倍。又 $e_{ij}$ 是所謂"变形速度"的一个二阶对称張量的分量，$e_{ii}$ 表示平行于 $x_i$ 軸的綫段的膨脹率的二倍，$e_{ij}$ $(i\neq j)$ 各表示平行于 $x_i$ 軸及 $x_j$ 軸的两个綫段間角度的变化率❷。

另一方面，点 $P$ 的"应力"也由一个二阶張量 $p_{ij}$ 来表示，这里 $p_{ij}$ 意味着：作用于通过 $P$ 点且垂直于 $x_i$ 軸的平面上，平行于 $x_j$ 軸方向的应力。今在上述微小六面体上，考虑作用着这样的应力，由其力矩为零的条件得到 $p_{ij}=p_{ji}$，所以应力張量是一个对称張量。

❶　应叙述为"单位时間內单位体积的質量增加 $\partial\rho/\partial t$ 等于单位时間內流入六面体的質量除其体积 $-(\partial/\partial x_i)(\rho u_i)$"。——校者注

❷　可参閱柯青等著《理論流体力学》第一卷第一章。——校者注

特别当流体静止的情形，应力垂直于各面，而且有和面的方向无关的一定值 $p_0$（$i=j$ 时 $p_{ij}=-p_0$；$i\neq j$ 时 $p_{ij}=0$）。又当流体作平行剪切运动 $u_1=u_1(x_2)$，$u_2=u_3=0$ 时，则由粘性而生的剪切应力 $p_{21}=\mu(du_1/dx_2)$，这实质上就是"粘性系数" $\mu$ 的定义。应力和变形速度間应該成立着一个普遍的关系式，它包括这些結果作为特例。为了求此关系，假設应力是变形速度的綫性函数，则得❶

$$p_{ij}=(-p_0+\lambda_0\mathfrak{D})\delta_{ij}+\mu e_{ij}. \tag{1.7}$$

这里 $p_0$ 是和变形速度无关的一定应力，$\lambda_0$ 是物质常数，$\delta_{ij}$ 是 Kronecker 記号（$i=j$ 时 $\delta_{ij}=1$；$i\neq j$ 时 $\delta_{ij}=0$），$\mathfrak{D}$ 是由

$$\mathfrak{D}=\frac{1}{2}(e_{11}+e_{22}+e_{33})=\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \tag{1.8}$$

所定义的"体积膨脹速度"。今設垂直应力 $p_{ii}$ 的平均值是 $-p$，且将 $p$ 定义为"压力"时，则得

$$p=-\frac{1}{3}(p_{11}+p_{22}+p_{33})=p_0-\left(\lambda_0+\frac{2}{3}\mu\right)\mathfrak{D}. \tag{1.9}$$

这里若假定压力取和变形速度无关的值❷，则也有必要取

$$\lambda_0+\frac{2}{3}\mu=0, \tag{1.10}$$

于是 $p$ 和 $p_0$ 一致。实际上，按照气体分子运动論，特别是若不考虑高压的情形时，$\lambda_0+\frac{2}{3}\mu$ 比起 $\mu$ 来是可以略去的小量。在这样理解的基础上，应力和变形速度間的关系为

$$p_{ij}=-\left(p+\frac{2}{3}\mu\mathfrak{D}\right)\delta_{ij}+\mu e_{ij}. \tag{1.11}$$

这个关系，是假定变形速度很小而得到的。但用这个关系推导出的結果和实驗結果比較起来，适用范圍并不过于狹小。在这样意义下，比起同样假定微小变形的弹性理論的限制来，我們的情

❶ 假設气体是各向同性的。——校者注

❷ 不拘流体运动有无，这个事实是和假定状态方程(1.1)的根据一样。

形还是比較有利的。对分子构造特別复杂的流体，以及出現大的变形速度的情形，(1.11)就不能适用了。

**运动方程**　对于上述微小六面体运用动量守恒定律，则因单位体积的惯性力分量是 $-\rho(Du_i/Dt)$（而 $Du_i/Dt$ 是流体微团的速度变化，也就是加速度分量），外力分量是 $\rho F_i$（而 $F_i$ 是作用于单位质量上的外力分量），由应力而生的力的分量是 $\partial p_{ij}/\partial x_j$，所以动量守恒可表示为

$$\rho\frac{Du_i}{Dt}=\rho F_i+\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j}. \tag{1.12}$$

这里将(1.11)代入，得

$$\rho\frac{Du_i}{Dt}=\rho F_i-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p+\frac{2}{3}\mu\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]. \tag{1.13}$$

这个关系式，是由 Navier(1823) 和 Stokes(1845) 分别独立地推导出来的，通常称为 Navier-Stokes 方程（今后将略記为 N.S. 方程）。

**能量方程**　若考虑随着流体一同运动的閉曲面 $\sigma$ 所包圍的流体团时，则能量守恒定律可表示为

$$\frac{D}{Dt}\left(K+\int\rho E\,d\tau\right)=W_1+W_2+Q. \tag{1.14}$$

左侧是“动能” $K=\int\frac{1}{2}\rho u_iu_i\,d\tau$ 及“內能” $\int\rho E\,d\tau$ 的变化率，积分是就 $\sigma$ 所包圍的体积作的。右側各表示单位时間內作用在 $\sigma$ 上的应力所作的功、在 $\sigma$ 的內部由外力所作的功及通过 $\sigma$ 而傳导的热。命 $\sigma$ 的外向法綫方向余弦为 $l_i$，利用 Green 定理，(1.12) 及 (1.6)，得

$$W_1=\int u_il_jp_{ji}\,d\sigma=\int\frac{\partial}{\partial x_j}(u_ip_{ji})d\tau$$

$$= \int p_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} d\tau + \int u_i \left(\rho \frac{Du_i}{Dt} - \rho F_i\right) d\tau$$

$$= \int p_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} d\tau + \frac{DK}{Dt} - W_2 .$$

又設“导热系数”为 $\lambda$，则因

$$Q = \int \lambda l_j \frac{\partial T}{\partial x_j} d\sigma = \int \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j}\right) d\tau,$$

所以(1.14)变成

$$\int \rho \frac{DE}{Dt} d\tau = \int p_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} d\tau + \int \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j}\right) d\tau.$$

但由于这个結果和 $\sigma$ 的形状无关地成立，所以“能量方程”可写成如下形状：

$$\rho \frac{DE}{Dt} = p_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j}\right). \tag{1.15}$$

又能量方程也可用“熵” $S$ 或者“焓” $I$ 代替內能 $E$ 而表示为如下形状。令

$$TdS = dE + pd\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad I = E + \frac{p}{\rho},$$

参照(1.4)可得

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = \Phi + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j}\right), \tag{1.16}$$

$$\rho \frac{DI}{Dt} = \Phi + \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j}\right). \tag{1.17}$$

这里

$$\Phi = p_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + p \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$$

$$= \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)^2, \tag{1.18}$$

函数 $\Phi$ 的意义由(1.16)显然可知，它表示单位时間內单位体积所散逸的能量。若假定为理想气体，設定容比热为 $c_v$，定压比热为

$c_p$，则可以給出

$$\Re = c_p - c_v, \quad E = \int c_v dT, \quad I = \int c_p dT.$$

**边界条件** 这样，对于六个未知量 $\rho$, $p$, $T$ 及 $u_i$ 提供了六个方程(1.1)，(1.2)，(1.13)及(1.15)。在多数情形可消去 $\rho$ 及 $p$，仅对于 $T$ 及 $u_i$ 給出边界条件。例如在物体表面上，設物体的温度为 $T_w$，速度分量为 $u_{i_w}$，必有

$$T = T_w, \quad u_i = u_{i_w}. \tag{1.19}$$

若沒有通过物体表面的热傳导，命表面的法綫方向余弦为 $l_i$，则可用 $l_i(\partial T/\partial x_i) = 0$ 代替前面的条件。又在无限远离物体的地方，$T$ 及 $u_i$ 也都必須是有界的。

**非粘性假定** 在水和空气那种粘性很小的流体的情形，只考虑离开物体表面的地方的运动时，大体上可允許略去流体的粘性。将粘性系数 $\mu$ 及导热系数 $\lambda$ 都設为零，且假設外力具有势 $\Omega$，而

$$F_i = -\frac{\partial \Omega}{\partial x_i},$$

则(1.13)及(1.16)各变为

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0, \tag{1.20}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u_i \frac{\partial S}{\partial x_i} = 0. \tag{1.21}$$

这里❶

$$H = \frac{1}{2} u_i u_i + \int \frac{dp}{\rho} + \Omega. \tag{1.22}$$

若速度分量也可用“速度势” $\phi$ 导出，如 $u_i = \partial\phi/\partial x_i$，则旋度 $\omega_i$ 到处为零(无旋运动或无渦运动)，将(1.20)积分后，得到“Bernoulli 方程”

---

❶ 此地假定 $\rho = \rho(p)$ 成立，即討論密度 $\rho$ 仅为压力 $p$ 的函数的“正压过程”(例如等熵过程，$p = c\rho^\gamma$)，还要假定运动是无旋的。——校者注

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+H=F(t). \tag{1.23}$$

特别在不随时間而变的定常运动的情形，$H$ 到处等于常数。又如运动对于时間是定常的，但旋度却不为零，则

$$u_i(\partial H/\partial x_i)=0,\ u_i(\partial S/\partial x_i)=0,$$

卽 $H$ 和 $S$ 沿着一条流綫各保持一定值。在理想流体的比热一定时，設 $\gamma=c_p/c_v$，则"声速" $a$ 为

$$a^2=\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_S=\frac{\gamma p}{\rho}=\gamma\Re T, \tag{1.24}$$

(1.22)变为

$$H=\frac{1}{2}u_iu_i+\frac{a^2}{\gamma-1}+\Omega. \tag{1.25}$$

**不可压縮性假定** 在多数普通問題的情形，恒可假定液体沒有"压縮性"。卽使是气体，当速度比声速小得多时，也可允許略去压縮性。此时密度 $\rho$ 一定，所以(1.4)，(1.13)及(1.17)各变为

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0, \tag{1.26}$$

$$\rho\frac{Du_i}{Dt}=\rho F_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right], \tag{1.27}$$

$$\rho\frac{DI}{Dt}=\mu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\frac{Dp}{Dt}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x_j}\right). \tag{1.28}$$

$\mu$，$\lambda$，$c_p$ 及 $c_v$ 都是温度 $T$ 的函数，但若温度变化不大时，将它們看作常数也无多大关系。又可以看作外力的一些量，例如重力等，除在一些特殊場合以外，它們不起决定性的影响，所以也可以不予考虑。这样，(1.27)就变为

$$\rho\frac{Du_i}{Dt}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\mu\nabla^2u_i \tag{1.29}$$

($\nabla^2=\partial^2/\partial x_1^2+\partial^2/\partial x_2^2+\partial^2/\partial x_3^2$)，利用上式及(1.26)，就可决定压

力和速度分量❶了。本书的目的是說明粘性起重要作用的現象，所以考慮最后这个簡单情况是合适的❷。特别将压縮性影响也予以考虑的情形仅限于§13及§18。此外各节都从(1.26)和(1.29)出发进行討論。

在这里还須附带讲几句，当$u_i=\partial\phi/\partial x_i$时，(1.29)的右侧第二項为零，于是无旋运动可以当作(1.29)的解，但它却仅能满足微分方程，至于边界条件就是另一个問題。非粘性不可压縮性流体的无旋运动的速度势$\phi$，由(1.26)所导出的Laplace方程

$$\nabla^2\phi=0 \tag{1.30}$$

所决定。所以对于物体表面的速度沿法綫方向的分量的条件是可以給出来的，但同时連切綫分量也规定出来是不可能的。也就是說当固定表面上法綫分量为零时，切綫分量通常却可取有限值(滑动)，它不能满足物体和流体間不能有相对运动的边界条件(1.19)。这个事实意味着：因为略去粘性使微分方程降阶，不能满足所要求的全部边界条件。所以不管流体的粘性怎样小，我們也必須避免将它完全略掉，至少在接近物体表面处，有考虑粘性影响的必要。

## §2 N.S.方程的准确解例

如上所述，即使有不可压縮性的假定，流体运动方程通常也不可能解出。因为N S.方程是非綫性的。但在特别簡单的运动的情形，非綫性部分可以消失或者化为簡单的形状，这时方程也常可

---

❶ 若流又是定常的，则沿着流綫有$H=\frac{1}{2}u_iu_i+\frac{p}{\rho}=$常数(狭义的Bernoulli方程)。

❷ 若考虑到近年来高速粘性流理論的发展，则仅仅限于不可压縮的情形是不够的，需要对压縮性的影响进行充分的討論，这方面最为重要的是所謂“高速附面层理論”。本书在这方面的篇幅不多，讀者要比較詳細了解这方面，可参看本书末所列举的Howarth的书外，还可参看其他有关书籍，例如，Pai Shi-I: Viscous Flow Theory I, II.——校者注

以准确地解出。现在举几个重要的简单情形。在本节里将直交坐标$(x_1, x_2, x_3)$及速度分量$(u_1, u_2, u_3)$各写为$(x, y, z)$和$(u, v, w)$，于是連續方程(1.26)及N.S.方程各変为

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{2.1}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)\\
&\qquad=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),\\
&\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)\\
&\qquad=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right),\\
&\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)\\
&\qquad=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

**1) 定常平行剪切运动** $u=u(y, z)$, $v=w=0$ 的情形。这时連續方程自然地被满足，N.S.方程(2.2)变为

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \quad \frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial p}{\partial z}=0. \tag{2.3}$$

第一式右側不含$x$，所以$p$是$x$的綫性函数，其压力梯度$\partial p/\partial x$等于一常数$-G$。速度$u$的分布由求解 Poisson 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{G}{\mu} \tag{2.4}$$

可以得到。特别当流的状态是在$z$軸方向不变的二維情形，且流由$y=\pm b$这样的固定壁所限定时，将$d^2u/dy^2=-G/\mu$在条件“$y=\pm b$处$u=0$”之下积分，得

$$u=\frac{G}{2\mu}(b^2-y^2). \tag{2.5}$$

这是无限延展的两个平行壁間的流（图 2.1）。若流限制在以 $x$ 軸为軸而半徑为 $a$ 的圆柱面内部时，命距軸的距离 $\sqrt{y^2+z^2}$ 为 $r$，将

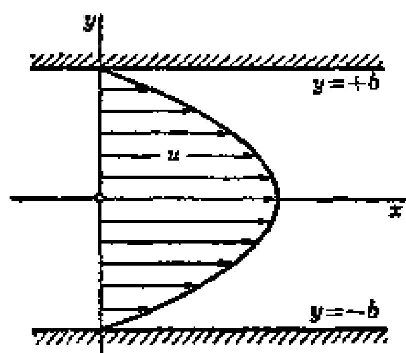


图 2.1

$$d^2u/dr^2+(1/r)(du/dr)=-G/\mu$$

在条件"$r=a$ 处 $u=0$"之下积分，得

$$u=\frac{G}{4\mu}(a^2-r^2). \qquad (2.6)$$

这是半徑为 $a$ 的圆筒里的流，首先由 Hagen(1839) 及 Poiseuille(1840) 各自独立地作成实験的研究，其后由 Wiedemann(1856)給出如上的解。速度在軸上最大，命其値为 $u_1$，則压力梯度变为 $G=4\mu u_1/a^2$. 計算結果和实験符合。

**2) 平面壁的不定常运动** 在和$(x, z)$平面相重的一个无限延展的平面壁循 $x$ 軸方向作不定常运动时，对于 $y>0$ 部分中的流体运动，有 $u=u(y, t)$，$v=w=0$，且压力是到处一样的。此时連續方程 (2.1) 也自然地被滿足，N. S. 方程 (2.2) 变成热傳导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad (2.7)$$

边界条件是

$$y=0: \quad u=f(t); \quad y=\infty: \quad u=0. \qquad (2.8)$$

这里 $\nu=\mu/\rho$ 是粘性系数除以密度而得的物质常数，叫作"运动粘性系数"。特别当平面壁作单弦振动 $f(t)=u_1\cos\omega t$ 时，(2.7) 的解为

$$u=u_1e^{-\sigma y}\cos(\omega t-\sigma y), \qquad \sigma=\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}. \qquad (2.9)$$

速度按照离开壁的距离而作指数函数的减少，圆頻率 $\omega$ 越大，运动粘性系数越小，則减少得越快。而 (2.7) 又是綫性的，所以将

(2.9) 对不同的 $\omega$ 的若干个解迭加起来就可求出任意周期运动的解了。

当壁用一定速度 $u_1$ 驟然开始运动时，若 $t\leqslant0$，則对于所有的 $y$ 有 $u=0$；若 $t>0$，在 $y=0$ 处有 $u=u_1$；在 $y=\infty$ 处有 $u=0$。滿足这样条件的(2.7)的解由

$$u=u_1\left(1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\eta e^{-\eta^2}d\eta\right),\quad \eta=\frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \qquad (2.10)$$

給出(Rayleigh, 1911)。此时的速度也随着到壁面的距离而按指数函数减少(图 2.2)。例如：$\eta=2$ 时，則在 $y=4\sqrt{\nu t}$ 的距离处，$u$ 不过是 $u_1$ 的 0.5% 以下。也就是說，粘性的影响显著地出現，仅限于到壁面的距离的量級为 $\sqrt{\nu t}$ 的部分。

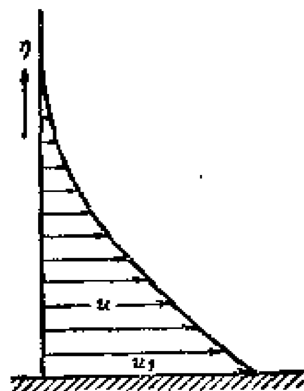


图 2.2

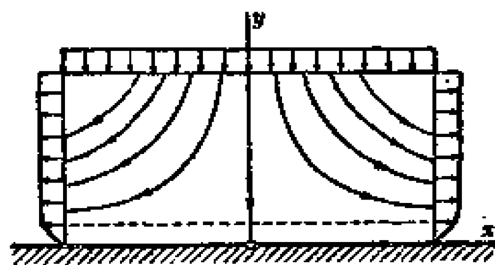


图 2.3

**3) 駐点附近的流** 向着重合于$(x, z)$平面的无限延展的平面壁有垂直的流，且原点是速度为零的点即"駐点"的情形(图 2.3)。設流是定常的，且在 $z$ 軸方向是不变的。非粘性流体的流的速度在原点附近是 $u=cx$，$v=-cy$，压力由 Bernoulli 方程(§1)得到 $p=p_0-\frac{1}{2}\rho c^2(x^2+y^2)$（但 $p_0$ 是駐点的压力）。考虑到这一点，再設

$$\left.\begin{aligned} &u=xf'(y),\quad v=-f(y),\quad w=0,\\ &p=p_0-\frac{1}{2}\rho c^2[x^2+g(y)], \end{aligned}\right\} \qquad (2.11)$$

且用撇号( $'$ )表示对于 $y$ 的导数，则連續方程(2.1)可以自然地滿足，由 N S. 方程得

$$f'^2-ff''=c^2+\nu f''', \quad ff'=\frac{1}{2}c^2g'-\nu f''. \qquad (2.12)$$

边界条件是：在 $y=0$，有 $u=v=0$，$p=p_0-\frac{1}{2}\rho c^2x^2$；在 $y=\infty$，有 $u=cx$，$v=-cy$。所以有

$$\text{在 } y=0:\ f=0,\ f'=0,\ g=0;\ \text{在 } y=\infty:\ f'=c. \qquad (2.13)$$

首先由(2.12)的第一式决定 $f$，然后代入到第二式内可以决定 $g$。若設 $y=\sqrt{(\nu/c)}Z$，$f(y)=\sqrt{c\nu}F(Z)$，第一式变为

$$F'''+FF''=F'^2-1 \qquad (2.14)$$

(撇号表示对于 $Z$ 的导数)，边界条件变为

$$Z=0:\quad F=F'=0;\quad Z=\infty:\quad F'=1. \qquad (2.15)$$

将(2.14)作数值积分 (Hiemenz, 1911; Howarth, 1935)，其結果如图2.4所示。因为 $F'=u/cx$，所以在 $Z\approx3$ 时 $F'$ 差不多等于1。这表示：沿着壁的流的速度在离壁大約有 $3\sqrt{\nu/c}$ 的距离处等于非粘性流体的值，所以粘性的影响仅限于离壁的距离在 $\sqrt{\nu/c}$ 的量級的部分(图2.3內直到虚綫的范圍)。

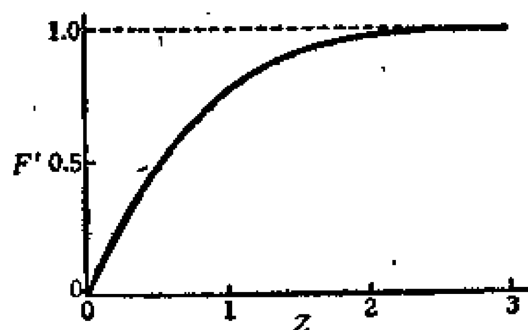



图 2.4

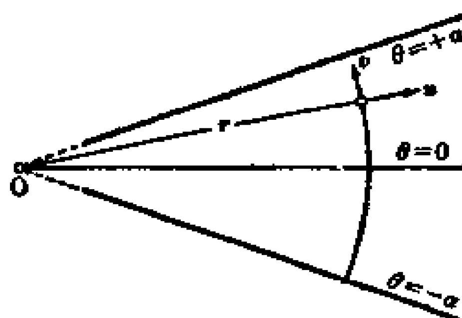



图 2.5

**4) 不平行壁間的流** 取两个不平行壁的交綫作 $z$ 軸的柱面坐标 $(r, \theta, z)$，命一点到 $z$ 軸的距离为 $r$，壁的位置可用 $\theta=\pm\alpha$

表示，如图 2.5。設关于柱面坐标的速度分量是 $u$, $v$, $w$, 则(2.1)及(2.2)各变成

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru)+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{2.16}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}-\frac{v^2}{r}+w\frac{\partial u}{\partial z}\\
&\qquad=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\nabla^2 u-\frac{u}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right),\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{uv}{r}+w\frac{\partial v}{\partial z}\\
&\qquad=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\nu\left(\nabla^2 v-\frac{v}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right),\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}+w\frac{\partial w}{\partial z}\\
&\qquad=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\nabla^2 w
\end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

$\left(\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{r^{-1}\partial}{\partial r}+\frac{r^{-2}\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$。现在考虑定常的放射流 $u=u(r,\theta)$, $v=w=0$ 的情形，则(2.16)由于設

$$u=\frac{2\nu F(\theta)}{r} \tag{2.18}$$

而成立[1]。由(2.17)得

$$\left.\begin{aligned}
-4\nu^2\frac{F^2}{r^3}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+2\nu^2\frac{F'''}{r^3},\\
0&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta}+4\nu^2\frac{F'}{r^3}
\end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

(撇号表示对 $\theta$ 的导数)。由第二式得 $p=4\rho\nu^2F/r^2+P(r)$，但

[1] 只有在 $r=0$ 时，有 $u=\infty$，所以为了避免这一点，假定壁达不到 $r=0$，而終止在它的附近，参閱图 2.5。

$P(r)$仅为 $r$ 的函数，将它代入到第一式得

$$\frac{r^3}{\rho\nu^2}\frac{dP}{dr}=2F''+4F^2+8F.$$

左边仅为 $r$ 的函数，右边仅为 $\theta$ 的函数，所以两边必須等于实的常数，命为 $-a$，作积分，得到

$$F'^2+\frac{4}{3}F^3+4F^2+aF=b.$$

这里 $b$ 为积分常数，是一正实数。若再設

$$3f(\theta)=-F(\theta)-1,\quad g_2=\frac{1}{3}(4-a),\ g_3=\frac{1}{27}(8-3a-3b)$$

时，則 $f$ 是微分方程

$$f'^2=4f^3-g_2f-g_3$$

的解，利用 Weierstrass 的椭圓函数，得到 $f(\theta)=\wp(\theta-\theta_0)$ ❶. 于是速度和压力各表为

$$\left.\begin{aligned}u&=-\frac{3\nu}{r}[3\wp(\theta-\theta_0)+1],\\p&=-\frac{4\rho\nu^2}{r^2}[3\wp(\theta-\theta_0)+1]+\frac{a\rho\nu^2}{2r^2}+p_0.\end{aligned}\right\}\qquad(2.20)$$

这里 $\theta_0$ 及 $p_0$ 都是积分常数，特別是 $\theta_0$ 滿足壁面的边界条件

$$\theta=\pm\alpha:\qquad u=0,$$

对变域 $-\alpha\leqslant\theta\leqslant\alpha$ 的所有 $\theta$ 値，$u$ 是实数，并且是有界的。

这个問題是由 Jeffery (1915) 及 Hamel (1916) 开始研究的，由 Rosenhead (1940) 予以詳細討論。当三次方程 $4x^3-g_2x-g_3=0$ 的判別式 $\Delta=g_2^3-27g_3^2$ 是負时，$F(\theta)\geqslant0$，且 $F$ 对于 $\theta=0$ 是对称的，$F$ 由它在 $\theta=0$ 的最大値 $F(0)$ 单調地减少到 $\theta=\pm\alpha$ 的最小値。也就是說，在此情形如图 2.6 的 $A_1$ 所示，表示純粹外向的流。

❶ 即 $\theta-\theta_0=\pm\int_\infty^f\frac{df}{\sqrt{4f^3-g_2f-g_3}}$，$\theta_0$ 是使 $f=\infty$ 的 $\theta$ 值，可能是复数。——校者注

与此相反，当判别式是正时，事情是复杂的，除純粹的外向流外，还可能出現純粹的内向流以及外向同内向共存的流，而且对于 $\theta=0$，流动也可能不是对称的。也就是說，图 2.6 所指出的种种流都可

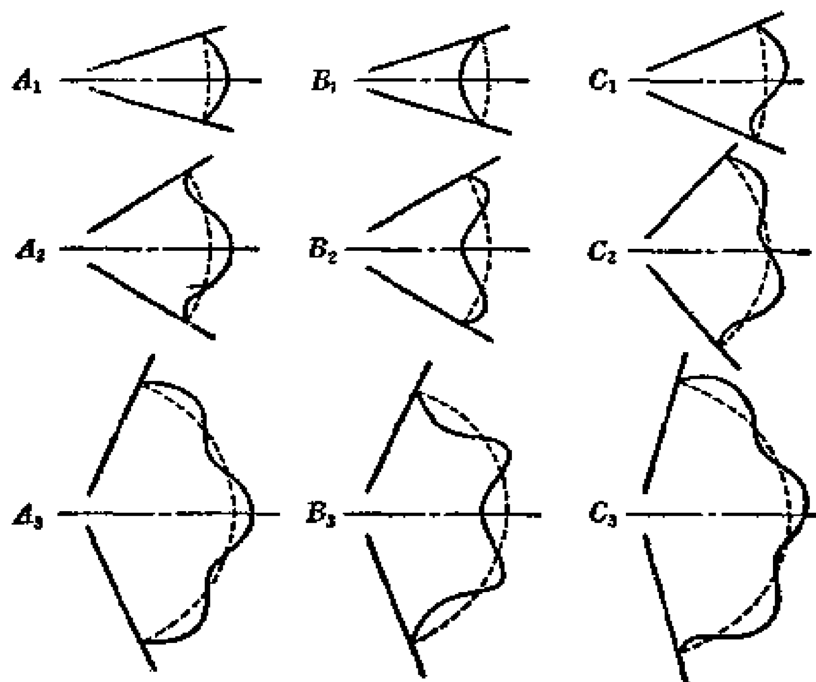



图 2.6

以发生，只用判别式的正負不能将流的类型区别出来。現在就 $z$ 方向的单位长的流量 $Q=\int_{-\alpha}^{\alpha} ur\, d\theta$ 可导出无因次的量

$$R=\frac{Q}{2\nu}=\int_{-\alpha}^{\alpha} F(\theta)\,d\theta, \tag{2.21}$$

当 $R>0$ 时，流叫作平均外向的，$R<0$ 时，是平均内向的。将种种流可以发生的界限用 $\alpha$ 与 $R$ 的組合表示如图 2.7。在曲綫上給出的記号 $A_1$，$B_1$，… 指示出在曲綫的左側范圍内，有图 2.6 里用同一記号表示的流得以发生。只有在 $A_1$ 的情形，其范圍由曲綫左側直到直綫 $R=0$ 之間。在此，例如 $\alpha=\pi/8$ 的情形，在 $R=-\infty$ 除去 $A_1$ 外所有流都有可能，在 $0<R<14$，除去 $B_1$ 外所有流都有可

能。若 $R$ 超过 14 时，在 $B_1$ 之外 $A_1$ 也是不可能的，再超过 17 时 $A_2$ 也不可能了。

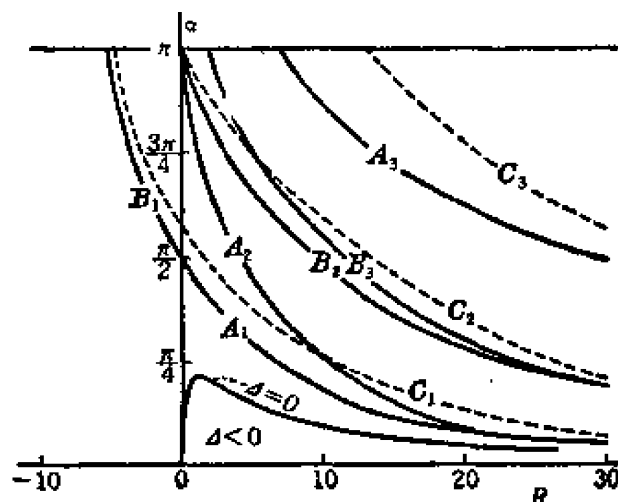



图 2.7

总之，对于給出的 $\alpha$ 和 $R$ 的值，应该存在着无数多个流。特别在实际中，仅由上面的計算不能决定它們里面的定常流究竟能否实现。又在实际情形，在入口和出口的断面上压力分布应该是給定的，但作为压力分布是不能有过于复杂的情况，在此意义下，可以說純外向或純内向的流（$A_1$ 或 $B_1$）最容易出现。即使这样，在平均外向流（$R>0$）和平均内向流（$R<0$）間也可以看出本质上的显著差别。在平均外向流的情形，当 $R$ 超过某一値时，純外向流 $A_1$ 已不能存在，仅次于它的簡单的流 $A_2$，在接近壁处随伴内向逆流。$R$ 再增加时，这个流也不能存在，而仅剩下含有更复杂的逆流的类型的流了。与此相反，在平均内向流的情形，即使 $|R|$ 增加时，也不致发生某种类型的流不存在的情况。特别在純粹内向流 $B_1$ 的情形，当 $|R|\to\infty$ 的极限时，最大速度和平均速度的比 $2\alpha F(0)/R$ 接近于1．也就是說，随着 $|R|$ 的增加，速度分布在壁間几乎是均匀的，和非粘性流体的无旋运动同样，粘性影响仅限于壁附近极薄的一层。按实际計算結果，这个层的厚度和 $|R|^{-\frac{1}{2}}$ 成比例地减少。

## §3 N. S. 方程的一般性质

如前所述，求 N. S. 方程(1.29)的一般解通常是不可能的。但若利用相似原理作考察，由少数准确解的归納，和实驗結果比較等

方法，在某种程度可以看出它的一般性质来。

首先利用相似原理作考察。为了容易理解，考察一个特殊的情形❶。設将物体放置在平行于 $x_1$ 軸的均匀流中。命物体的代表的长度是 $l$，离物体十分远的地方的均匀流速是 $u_0$，且利用它們定义无因次量

$$X_i=\frac{x_i}{l},\quad T=\frac{u_0t}{l},\quad U_i=\frac{u_i}{u_0},\quad P=\frac{p}{\rho u_0^2},\tag{3.1}$$

則連續方程(1.26)和 N.S. 方程(1.29)各变为

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_i}=0,\tag{3.2}$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial T}+U_j\frac{\partial U_i}{\partial X_j}=-\frac{\partial P}{\partial X_i}+\frac{1}{R}\nabla^2U_i.\tag{3.3}$$

但 $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial X_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial X_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial X_3^2}$，且

$$R=\frac{u_0l}{\nu},\tag{3.4}$$

$\nu=\mu/\rho$ 表示运动粘性系数，已經在 §2, 2) 里用过。边界条件是在物体表面有 $u_i=0$，于是有 $U_i=0$；在无限远处有 $u_1=u_0$，$u_2=u_3=0$，于是有 $U_1=1$，$U_2=U_3=0$。由此显然可知，(3.4) 定义的无因次量 $R$ 是运动方程的参数，若它的值是相同的，則 $u_i/u_0$ 及 $p/\rho u_0^2$ 仅是 $x_i/l$ 及 $u_0t/l$ 的函数。在此意义下，两个几何学的相似流，其各个的长度、速度、密度及运动粘性系数即使不相同，但若它們各个的 $R$ 的值相同，就可以看作是力学相似的❷。此时在物体上作用

❶ 当然結論是一般的，不仅限于特殊的情形。

❷ 这个結論只限于没有外力且不考虑压縮性的影响的情形。当有必要将重力当作外力加以考虑时，除 $R$ 之外 $u_0/\sqrt{gl}$（$g$ 是重力的加速度）也必須是相同的。又若有考虑压縮性的必要时，除 $R$ 之外 $u_0/a$，$c_p/c_v$ 及 $\mu c_p/\lambda$（$a$ 是声速，$c_p$ 是定压比热，$c_v$ 是定容比热，$\lambda$ 是导热系数）也必須是相同的。

的力除以 $\rho u_0^2 l^2$ 而得的无因次量是各个相等的。换言之，这样的无因次量，对于几何学的相似流，都仅为 $R$ 的函数。应用相似原理来考察是 Reynolds(1883)提出的，所以参数 $R$ 叫作"Reynolds 数"。无因次的力是 Reynolds 数的函数的例，表示在图 5.2, 6.2, 6.4 及 11.1 里。又 § 2, 4)里所用的 $R$, 实际上就是 Reynolds 数而不是别的。

求适用于 $R$ 所有值的解是不可能的，但在两个极端，即 $R$ 非常小和 $R$ 非常大的情形，可能近似地解出 N. S. 方程。当 $R$ 非常小时，(3.3)或(1.29)左侧的"惯性项"完全可以略去或者用适当的近似作綫性化后，可以求出近似解。其詳細情况，将于第二章叙述。与此相反，当 $R$ 非常大时，(3.3)或 (1.29) 右側第二項，即所謂"粘性項"可考虑略去。这和非粘性流体的假定相当。其結果已在 § 1 的末尾讲过，微分方程的阶数可以降低，而满足物体表面上的边界条件是不可能的。特别在 § 2,2) 及 3) 曾經注意过，粘性影响在离物体表面的距离在 $\sqrt{\nu t}$ 的量級的范圍里是很显著的，亦即粘性影响只限于直到 $lR^{-\frac{1}{2}}$ 量級的范圍以内，这个部分的厚度随 $R$ 的增加而逐渐减小。所以对于 $R$ 十分大的流，粘性影响仅限于物体表面极近的薄层，将它的外側看成可以用非粘性流体的无旋运动来描述就行了。这个薄层叫作"边界层"，在其中可使(1.29)化簡。关于边界层的处理，将于第 3 章詳述之。

在 § 2, 1) 的例題里，虽曾說过計算結果和实驗很能符合，但这仅限于 Reynolds 数不超过某一値的情形。由边界层理論推导出的結果，也是当 Reynolds 数超过某一定値时，計算已不能和实驗一致。其理由是当 Reynolds 数十分大时，在計算里所假定的規則的定常流，即所謂"层流"状态得以保存的例子是不多見的，在多数情形有不規則的不定常的流，即所謂"紊流运动"出現。这个事实并不意味着：当 Reynolds 数超过某一値时，N. S. 方程的定常

解（例如(2.5)）不存在。即使定常解对于所有 Reynolds 数都存在，但它对于大的 Reynolds 数是不稳定的，至少不是最稳定的解，用更稳定的非定常解来代替它，这是可以想象的。非定常解也不是只有一个，服从同一边界条件的非定常解可以有很多，这样解的統計的集合可以看作是表示紊流运动的❶。但在实际情形，一般地求不定常解是不可能的，所以即使将紊流作这样解釋，而具体地却得不到什么。只是知道定常解丧失稳定性的界限在某种程度上是可能的，这只須給定常解加上很小的扰动，而决定扰动不能衰减的界限就够了。若假定扰动很微小时，N. S. 方程可以綫性化，于是可将它解出而計算稳定的界限。这方面的詳細情況，在第4章介紹。又紊流是很复杂的运动，而在实际上仅需要平均值，所以通常多采用統計处理，为了这样作，就需要利用将連續方程及 N. S. 方程作統計的平均而得的关系。但采用統計的平均，仅有这些方程还不够用，必須再加上其他适当的假定。这样作已經离开应用数学兴趣的中心，不再予以詳述了❷。

## §4 分子运动論基础

气体运动方程，可用气体分子运动論給予理論的基础。我們曾説过用压力的定义給出了状态方程(1.1)，由分子数目的守恒可导出連續方程(1.2)。又在分子运动所引起的动量变化上运用动量守恒定律，可将运动方程用(1.12)的形状給出，同样将能量守恒

---

❶ 对于这个問題有兴趣的讀者，可参考 Leray (1933) 对于 N. S. 方程的数学研究。N. S. 方程在二維流的情形，在适当初始条件和边界条件下解是存在的，且可唯一地决定。但在三維流的情形，将解的性质加上某些限制，可証明若有解存在，则必唯一，但却不能証明解的存在。又若将对于解的性质的限制放宽时，可証明解的存在，但不能証明唯一性。所以人們想象，三維流或許不具有唯一性。这个事实暗示出紊流运动的不定常性。这是很有趣的。

❷ 紊流理論是粘性流体理論中內容丰富的一个部門，有兴趣的讀者可参阅专門书籍，例如 Pai Shi-i: Viscous Flow Theory II. ——校者注

定律公式化，就可推得能量方程(1.15)的形状。

特别是，当具体地求(1.12)及(1.15)里所含应力 $p_{ij}$ 及导热 $q_i$ 的表現时，就有必要利用"Boltzmann 方程"决定气体分子的速度分布函数。静止的均匀气体的速度分布虽可用所謂"Maxwell 分布函数"給出，但作为它的第0阶近似，将 Boltzmann 方程逐次近似地解出，就可以决定运动着的不均匀气体的速度分布(Chapman, 1916; Enskog, 1917; Burnett, 1935)。用速度的第0阶近似得到

$$p_{ij}^{(0)}=-p\delta_{ij}, \qquad q_i^{(0)}=0, \tag{4.1}$$

而此結果却和假定是非粘性流体时相当。其次，利用速度分布的第1阶近似时，得

$$p_{ij}^{(1)}=-\left(p+\frac{2}{3}\mu\mathfrak{D}\right)\delta_{ij}+\mu e_{ij}, \qquad q_i^{(1)}=-\lambda\frac{\partial T}{\partial x_i}, \tag{4.2}$$

这里若将 $\mu$ 及 $\lambda$ 各解釋成粘性系数及导热系数时，則由(1.11)及(1.15)显然可求得对于粘性流体的 N. S. 方程。在推导这些結果时，仅考虑分子平移运动的能量，所以它們的严格适用范圍也仅能局限于单原子气体或其混合物。再进一步計算系数 $\mu$ 及 $\lambda$ 时，有必要假定分子間的力場，由最簡单的 Maxwell 逆五次幂模型❶，可导出 $\mu\propto\sqrt{T}$，$\lambda/\mu c_v=2.5$ 的結論。但为了求得符合于实驗結果的 $\mu$ 的温度变化❷，就必須采用更复杂的模型。

再进一步作近似，采用速度分布的第2阶近似时，則得

$$p_{ij}^{(2)}=-\left(p+\frac{2}{3}\mu\mathfrak{D}\right)\delta_{ij}+\mu e_{ij}+\tilde{\omega}_1\frac{\mu^2}{p}\mathfrak{D}\overline{\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}}$$
$$+\tilde{\omega}_2\frac{\mu^2}{p}\left[\overline{\overline{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(F_j-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j}\right)}}-\overline{\overline{\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}}}-2\overline{\overline{\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}}}\right]$$

---

❶ Maxwell 假設分子間相互作用力和它們間的距离的五次幂成反比。——校者注

❷ 例如参閱 Sutherland 公式(13.11)。

$$+\tilde{\omega}_3 \frac{\mu^2}{\rho T} \overline{\overline{\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j}}} + \tilde{\omega}_4 \frac{\mu^2}{\rho p T} \overline{\overline{\frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_j}}} + \tilde{\omega}_5 \frac{\mu^2}{\rho T^2} \overline{\overline{\frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_j}}}$$

$$+\tilde{\omega}_6 \frac{\mu^2}{p} \overline{\overline{\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}}}. \tag{4.3}$$

$$q_i^{(2)} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} + \theta_1 \frac{\mu^2}{\rho T} \mathfrak{D} \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

$$+\theta_2 \frac{\mu^2}{\rho T}\left[\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(T\mathfrak{D}) + 2\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial T}{\partial x_j}\right]$$

$$+\left[\theta_3 \frac{\mu^2}{\rho p} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \theta_4 \frac{\mu^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} + \theta_5 \frac{\mu^2}{\rho T} \frac{\partial T}{\partial x_j}\right] \overline{\overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_i}}}; \tag{4.4}$$

这里的二重横綫表示

$$\overline{\overline{A_{ij}}} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) - \frac{1}{3} A_{kk}\delta_{ij}.$$

对于 Maxwell 模型，有

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{\omega}_1 = \frac{4}{3}\left(\frac{7}{2} - \frac{T}{\mu}\frac{d\mu}{dT}\right), \quad \tilde{\omega}_2 = 2, \quad \tilde{\omega}_3 = 3, \\
&\tilde{\omega}_4 = 0, \quad \tilde{\omega}_5 = \frac{3T}{\mu}\frac{d\mu}{dT}, \quad \tilde{\omega}_6 = 8, \\
&\theta_1 = \frac{15}{4}\left(\frac{7}{2} - \frac{T}{\mu}\frac{d\mu}{dT}\right), \quad \theta_2 = \frac{45}{8}, \quad \theta_3 = -3, \\
&\theta_4 = 3, \quad \theta_5 = \frac{3}{2}\left(5 - \frac{T}{\mu}\frac{d\mu}{dT}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

(Burnett, 1935)。其詳情可参看 S. Chapman 和 T. G. Cowling: The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases (Cambridge, 1939).

将第 2 阶近似里給 $p_{ij}$ 及 $q_i$ 附加上的項，和第 1 阶近似里的項作比較时，就可看出对第 1 阶近似它是按比例

$$\frac{u_0}{l} \frac{\mu_0}{\rho_0 c_p T_0} = \frac{\mu_0}{\rho_0 u_0 l} \frac{u_0^2}{c_p T_0} = (\gamma - 1)\frac{M^2}{R} \tag{4.6}$$

增加的❶。这里 $l$, $u_0$, $T_0$, $\rho_0$ 及 $\mu_0$ 分别代表长度，速度，温度，

❶ 考虑到 $\mu c_p/\lambda$ 一般为接近于 1 的值。

密度及粘性系数，$R=\rho_0 u_0 l/\mu_0$ 是 Reynolds 数，$M=u_0/a_0$ ($a_0=\sqrt{\gamma \Re T_0}$)是 Mach 数。按分子运动理論，設分子平均速度为 $c_m$，平均自由程是 $l_m$ 时，则有 $\mu_0 \propto \rho_0 c_m l_m$，$a_0 \propto \sqrt{\gamma} c_m$，所以(4.6)的比和 $M(l_m/l)$ 成比例，它在通常压力下，对气体($l_m$ 为 $10^{-5}$ 厘米的量級)的情形是非常的小。这个事实意味着：使用第1阶近似而得的 N. S. 方程时可以导出十分正确的結果。在极低压的稀薄气体且 Mach 数相当大时，就需利用复杂的第2阶近似。然第2阶近似的 $p_{ij}$ 及 $q_i$ 里含有高阶导数，考虑到这一点而想解方程时，就非再增加上一些边界条件不可，至于如何取这些条件，現在还沒搞清楚，有待将来的探討。特别当 $M$ 不很大时，例如在 $M<3$，$l_m/l<1$ 的量級时，只要对边界条件加以特别考虑，使用第1阶近似的 N. S. 方程就行了。

这便是 Maxwell (1879) 所闡明的滑动現象。若沿物体表面取 $x_1$ 軸，命表面是 $x_2=0$，温度是 $T$，在 $x_1$ 軸方向的速度分量是 $u_1$，通常压力下气体的边界条件是在 $x_2=0$ 有 $u_1=0$，$T=T_w$，但在低压气体时的边界条件是在 $x_2=0$，有

$$\left.\begin{aligned} u_1&=0.998\,\frac{2-f}{f}\,l_m\,\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{3}{4}\,\frac{\mu}{\rho T}\,\frac{\partial T}{\partial x_1},\\ T&=T_w+1.996\,\frac{2-\alpha}{\alpha}\,\frac{\gamma}{\gamma+1}\,\frac{\lambda}{\mu c_p}\,l_m\,\frac{\partial T}{\partial x_2},\end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

那末在物体表面上速度及温度都必須具有滑动(不連續)。$f$ 叫作“反射系数”，$\alpha$ 叫作“适应系数”，由实驗可知它們都趋近于1的值。由于这种意义，在 $l_m/l$ 由 $10^{-2}$ 到1的范圍里，有时叫作“滑流”。与此相反，$l_m/l$ 比1大得多的情形，已不允許将气体当作連續介质来处理了。在这种情形，分子間的碰撞可不予考虑，仅考虑物体表面上的碰撞就够了，所以我們将这个情形叫作“自由分子流”的范圍(錢学森，1946)。

# 第2章　小 Reynolds 数的流

本章将考虑 Reynolds 数很小的流，也就是速度和物体的尺寸都很小而粘性却很大的流。此时 N. S. 方程(1.29)左側的慣性項比右側的粘性項小得多，可以将它完全略去 (Stokes 近似)，或者利用适当近似将它綫性化 (Oseen 近似)，借此求它的近似解是可能的。在 §5 及 §6 就說明这些近似方法。在 §7 說明 Reynolds 数不很小，不能适用近似解法的情形，此时用数值积分法可以看出大致的傾向。为了簡单起見，假定所有的流都是定常的，沒有外力作用且又不考虑压縮性的影响。

## §5 Stokes 近似

在上述假定下，連續方程及 N. S. 方程各由(1.26) 及 (1.29) 变成如下形状：

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0, \tag{5.1}$$

$$\rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\mu\nabla^2 u_i. \tag{5.2}$$

这里 $u_i(u_1, u_2, u_3)$ 是对于直交坐标 $x_i$ $(x_1, x_2, x_3)$ 的速度分量，$p$ 是压力，$\rho$ 是密度，$\mu$ 是粘性系数，$\nabla^2$ 是 Laplace 算子，表示 $\partial^2/\partial x_1^2+\partial^2/\partial x_2^2+\partial^2/\partial x_3^2$。今若略去(5.2)左側的慣性項，得

$$\mu\nabla^2 u_i=\frac{\partial p}{\partial x_i}, \tag{5.3}$$

再和(5.1)結合起来，得

$$\nabla^2 p=0. \tag{5.4}$$

Stokes(1845) 利用这样近似方程，来計算放置在无限延展的

粘性流体里且用一定速度运动的球所受的阻力。但球的直徑 $2a$，速度 $u_0$ 及流体的粘性系数 $\nu=\mu/\rho$ 所作的 Reynolds 数

$$R=\frac{2au_0}{\nu} \tag{5.5}$$

假定为十分小的。现在若不将球看作以速度 $u_0$ 在静止流体里运动，而将球的中心看作固定在坐标原点，而在无限远处具有速度 $u_0$ 的均匀流在球周圍沿着 $x_1$ 軸正向流动。在这样的情形下，在 $x_1$ 軸周圍存在着对称性，此时可不用直交坐标 $(x_1, x_2, x_3)$ 而采取球面坐标 $(r, \theta, \varphi)$：

$$x_1=r\cos\theta,\ x_2=r\sin\theta\cos\varphi,\ x_3=r\sin\theta\sin\varphi, \tag{5.6}$$

将各方向的速度分量記为 $u, v, w$ 时，則有 $w=0$，且对于 $\varphi$ 的导数显然为零。由(5.4)可将压力 $p$ 用調和函数給出如下：

$$p=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\frac{\partial^n}{\partial x_1^n}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{A_0}{r}+\frac{A_1}{r^2}P_1(\cos\theta)+\frac{A_2}{r^3}P_2(\cos\theta)+\cdots \tag{5.7}$$

($P_n$ 是 $n$ 阶 Legendre 函数)，而第一項 $A_0/r$ 是球对称的，不适合当前的問題，所以在此仅采用第二項❶，而設

$$p=\frac{A_1}{r^2}\cos\theta. \tag{5.8}$$

采用球面坐标时，(5.1)变为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2u)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v\sin\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial\varphi}=0. \tag{5.9}$$

在(5.3)里和 $r$ 分量有关的項可表为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}$$
$$-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\theta}-\frac{2u}{r^2}-\frac{2v}{r^2}\operatorname{ctg}\theta-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial\phi}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r}. \tag{5.10}$$

---

❶ 带着第三項以下作計算是可以的，但由边界条件(5.11)可知，$A_2$ 以下各系数都为零，所以只取第二項就够了。

当然由轴对称性可知，(5.9)左边第三项和(5.10)左边的第三项及第七项都各为零。由(5.8)，(5.9)及(5.10)容易得到

$$u=\left(\frac{A_1}{\mu r}+B+\frac{C}{r^3}\right)\cos\theta,\quad v=\left(-\frac{A_1}{2\mu r}-B+\frac{C}{2r^3}\right)\sin\theta,$$

但为了适合球面上及无限远处的边界条件：

$$\left.\begin{array}{lll} r=a: & u=0, & v=0; \\ r=\infty: & u=u_0\cos\theta, & v=-u_0\sin\theta, \end{array}\right\} \tag{5.11}$$

非有 $A_1=-\frac{3}{2}\mu u_0 a$, $B=u_0$, $C=\frac{1}{2}u_0a^3$ 不可。于是压力及速度分量给出如下：

$$\left.\begin{aligned} p&=-\frac{3}{2}\mu u_0 a\frac{\cos\theta}{r^2}, \\ u&=u_0\left(1-\frac{3}{2}\frac{a}{r}+\frac{1}{2}\frac{a^3}{r^3}\right)\cos\theta, \\ v&=u_0\left(-1+\frac{3}{4}\frac{a}{r}+\frac{1}{4}\frac{a^3}{r^3}\right)\sin\theta. \end{aligned}\right\} \tag{5.12}$$

图 5.1 将这个流的状态用含有 $x_1$ 轴的平面上的流线表示出来[1]。

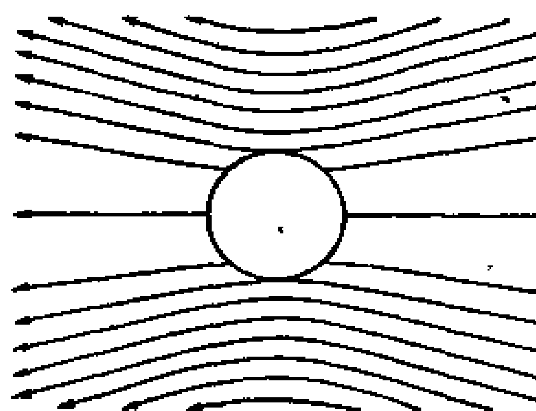


图 5.1

当计算球所受的阻力时，将作用在球表面上的应力的 $x_1$ 分量作积分即可。在应力里边，压力 $p$ 及粘性应力 $\tau$ 可各利用在(5.12)的第一式及在 $-\mu(\partial v/\partial r)$ [2] 里取 $r=a$ 而求得。应力在 $x_1$ 方向的分量是

---

[1] 这个流线是用 $dx_1/(u_1-u_0)=dx_2/u_2=dx_3/u_3$ 所定义的，所以是球在静止流体内运动时的流线。

[2] 在 $r=a$ 时，其他导数 $\partial u/\partial r$, $\partial u/\partial\theta$ 及 $\partial v/\partial\theta$ 都为零。

$$-p\cos\theta+\tau\sin\theta=\frac{3}{2}\mu\frac{u_0}{a}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=\frac{3}{2}\mu\frac{u_0}{a}.$$

这个值不含 $\theta$,所以乘以表面积 $4\pi a^2$ 时就得到阻力

$$D=6\pi\mu u_0 a. \tag{5.13}$$

这个关系式就是有名的 Stokes 阻力定律。利用无因次阻力系数 $C_D=D\Big/\frac{1}{2}\rho u_0^2\pi a^2$，求得

$$C_D=\frac{24}{R}. \tag{5.14}$$

当 Reynolds 数小于 1 时，这个結果很能和实驗結果一致，如图 5.2 所示。

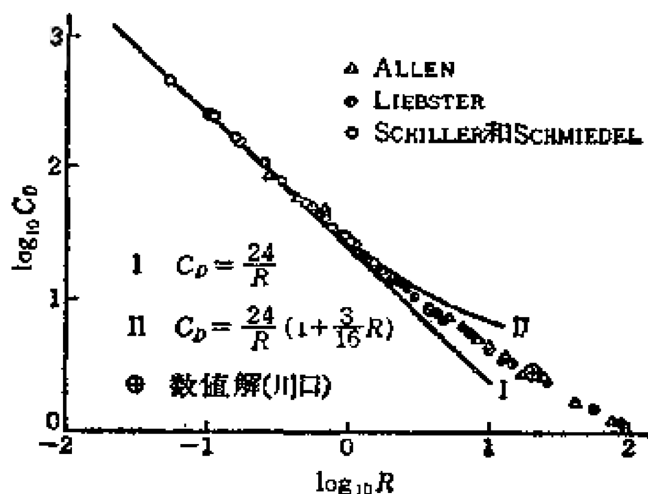



图　5.2

同样可处理二維問題，例如将 $x_3$ 軸方向的无限长的圓柱(半徑 $a$)放置在 $x_1$ 軸方向的均匀流里的情形。对于調和函数 $p$，不象(5.7)那样从 $1/r$ 出发，而可設 $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$，利用 $\ln r$❶(对数势)进行計算,但必須采用另一种方法。为了使連續方程(5.1)($i=1,2$)得到满足,将利用所謂流函数 $\psi$,設

$$u_1=\frac{\partial\psi}{\partial x_2},\quad u_2=-\frac{\partial\psi}{\partial x_1}, \tag{5.15}$$

❶ $1/r$ 是三維 Laplace 方程的基本解,而对于二維的方程,基本解是 $\ln r$. ——校者注

代入由(5.2)($i=1, 2$)消去 $p$ 而得的关系式里，得到

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial x_1}-\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial x_2}=\nu\nabla^4\psi \tag{5.16}$$

($\nabla^2=\partial^2/\partial x_1^2+\partial^2/\partial x_2^2$)。在此若略去左边的惯性項，則 $\psi$ 可看作是滿足

$$\nabla^4\psi=0 \tag{5.17}$$

的重調和函数。解此方程，得到滿足圓柱表面($r=a$)的边界条件 $u_1=u_2=0$ 的解

$$\left.\begin{aligned} u_1&=\frac{A}{2\mu}\left[\ln\frac{r}{a}+\frac{x_2^2}{2r^2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\right],\\ u_2&=-\frac{A}{2\mu}\frac{x_1x_2}{r^2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{5.18}$$

然后和球的情形同样，将圓柱每一单位长的阻力除以 $\frac{1}{2}\rho u_0^2\cdot 2a$ 而得的阻力系数是

$$C_D=\frac{2\pi A}{\rho u_0^2 a}. \tag{5.19}$$

但在远离圓柱($r$ 很大时)的地方，有

$$u_1\approx\frac{A}{2\mu}\ln\frac{r}{a}, \tag{5.20}$$

在无限远处是对数地发散的，所以不能由无穷远处的边界条件 $u_1=u_0$, $u_2=0$ 来决定常数 $A$。若用物理学观点解释这个对数地发散現象，就是由于无限长圓柱的作用，粘性影响应該达到无限远方。

由于这个事实，我們可以想象在离物体很远的地方 Stokes 近似不能成立。实际上，在球的問題里，对于很大的 $r$ 值，由(5.12)可知慣性項(例如 $\rho u\,\partial u/\partial r$)的量級是 $\rho u_0^2 a/r^2$，粘性項(例如 $\mu\partial^2 u/\partial r^2$)的量級是 $\mu u_0 a/r^3$，它們的比是

$$\frac{\rho u_0^2 a/r^2}{\mu u_0 a/r^3}=\frac{u_0 r}{\nu}=\frac{r}{2a}R.$$

这个事实意味着：不管 Reynolds 数 $R$ 怎样小，在 $r/a$ 十分大的地方，粘性项和慣性项相比是不能省略掉的。于是 Stokes 近似通常不适用于流延展到无限的情形。阻力法則(5.13)之所以能給出良好結果，是因为阻力仅由接近球的流所决定，而接近球的流僥幸地可以用 Stokes 近似給出大体上正确的結果。

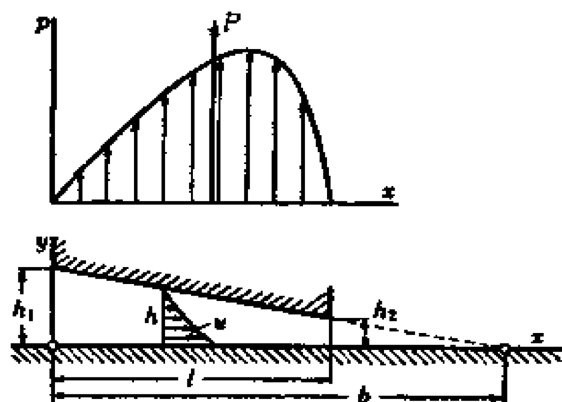



图 5.3

作为有限延展的流的例，我們考虑油膜引起的潤滑問題。为了使几乎平行的固体表面可以互相滑动而又能支持荷載，就有必要使它們中間有潤滑油的薄膜存在，且由膜的較厚部分向較薄部分发生流(Reynolds, 1886)。为了說明这个事实，考虑图 5.3 所表示的簡单情形，假定平面 $y=0$ 沿 $x$ 軸方向以速度 $u_0$ 均匀运动，和它稍微傾斜的另一个长度为 $l$ 的平面壁是固定的，且在 $z$ 軸方向一切都是不变的。今两个平面的間隔 $h$ 非常小，所以压力 $p$ 仅是 $x$ 的函数。又 $\partial^2u/\partial x^2$ 比 $\partial^2u/\partial y^2$ 小，故将(5.3)看成

$$\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{dp}{dx} \tag{5.21}$$

就行了。将它在条件：$y=0$ 时 $u=u_0$，$y=h$ 时 $u=0$ 之下积分，得到油膜速度的分布

$$u=\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(y^2-hy)+\frac{u_0}{h}(h-y), \tag{5.22}$$

更利用流量 $\int_0^h u\,dy$ 与 $x$ 无关，恒为一定量的連續性条件，得到

$$\frac{dp}{dx}=6\,\mu u_0\frac{h-h_0}{h^3}. \tag{5.23}$$

但 $h_0$ 是积分常数。

今設两面的間隔在 $x=0$ 及 $x=l$ 各为 $h_1$ 及 $h_2$，则

$$h=h_1-\frac{h_1-h_2}{l}x, \tag{5.24}$$

将(5.23)积分，得到

$$p=\frac{6\mu u_0 l}{h_1-h_2}\left(\frac{1}{h}-\frac{h_0}{2h^2}+C\right).$$

这里积分常数 $h_0$ 及 $C$ 由边界条件

$$\left.\begin{array}{ll} x=0,\ h=h_1: & p=p_0, \\ x=l,\ h=h_2: & p=p_0 \end{array}\right\}$$

决定，由此得到压力分布

$$p=p_0+\frac{6\mu u_0 l}{h_1^2-h_2^2}\frac{(h_1-h)(h-h_0)}{h^2}, \tag{5.25}$$

为了使它能够支持荷载($p>p_0$)，非有 $h_1>h_2$ 不可。压力的合力为

$$P=\int_0^l(p-p_0)dx=\frac{6\mu u_0 l^2}{(k-1)^2h_2^2}\left(\ln k-2\frac{k-1}{k+1}\right), \tag{5.26}$$

粘性应力的合力(摩擦力)为

$$F=-\int_0^l\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}dx=\frac{2\mu u_0 l}{(k-1)h_2}\left(2\ln k-3\frac{k-1}{k+1}\right) \tag{5.27}$$

($k=h_1/h_2$)。当 $k=2.2$ 时，$P$ 取最大值 $0.16\,\mu u_0 l^2/h_2^2$，和它相对应的摩擦系数 $F/P$ 是 $4.7\,h_2/l$，这是非常小的❶。

这个結果是在慣性項和粘性項相比可以省略的情况下得到的。慣性項 $\rho u(\partial u/\partial x)$ 或 $\rho v(\partial u/\partial y)$ 的量級是 $\rho u_0^2/l$，粘性項 $\mu(\partial^2u/\partial y^2)$ 的量級是 $\mu u_0/h^2$，所以仅限于它們的比

$$\frac{\rho u_0^2/l}{\mu u_0/h^2}=\frac{u_0 l}{\nu}\frac{h^2}{l^2}$$

十分小的时候，亦即 Reynolds 数 $R=u_0l/\nu$ 及油膜的厚度比 $h/l$ 十分小的时候才可以适用。若这个比不十分小，将上述結果作为

❶ 例如軸承的潤滑所引起的 $h_2/l$ 是 $10^{-3}$ 的量級。

第1阶近似，而有再将惯性項代入以求第2阶近似的必要。若第1阶近似解及第2阶近似解各用上标数(1)及(2)区别，就可按下面的方式进行計算：

$$\left.\begin{aligned}&0=-\frac{dp^{(1)}}{dx}+\mu\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial y^2},\\&\rho\left(u^{(1)}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}+v^{(1)}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y}\right)=-\frac{dp^{(2)}}{dx}+\mu\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial y^2},\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\tag{5.28}$$

取第2阶近似的結果，給出压力合力及摩擦力各为如下形状：

$$P=\frac{\mu u_0 l^2}{h_2^2}\left[\frac{6}{(k-1)^2}\left(\ln k-2\frac{k-1}{k+1}\right)+R\frac{h_2^2}{l^2}\left(\frac{1}{7}-\frac{6}{35}\frac{k}{(k+1)^2}-\frac{1}{5}\frac{k\ln k}{k^2-1}\right)\right],\tag{5.29}$$

$$F=\frac{\mu u_0 l}{h_2}\left[\frac{2}{k-1}\left(2\ln k-3\frac{k-1}{k+1}\right)+R\frac{h_2^2}{l^2}\left(\frac{18}{35}\frac{k(k+1)^2}{(k-1)^3}-\frac{k-1}{35}\right)\right]\tag{5.30}$$

(Kahlert, 1948)。軸承的滑潤所产生 $Rh_2^2/l^2$ 的最大値，可以是接近于1的量級。

## §6 Oseen 近似

在上节所考虑的将物体放置在均匀流里的問題中，远离物体的地方的速度和均匀流的速度 $u_0$ 相差很少。所以取均匀流的方向作 $x_1$ 軸且設

$$u_1=u_0+u_1',\ u_2=u_2',\ u_3=u_3'\tag{6.1}$$

时，則 $u_i'$ $(i=1, 2, 3)$ 比 $u_0$ 小，它的二次以上的項可以略去。将这个近似运用于 N. S. 方程的慣性項，則可将(5.2)綫性化为

$$u_0\frac{\partial u_i'}{\partial x_1}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\nabla^2 u_i'\tag{6.2}$$

的形状($\nabla^2=\partial^2/\partial x_1^2+\partial^2/\partial x_2^2+\partial^2/\partial x_3^2$)。将这个方程和由連續方程(5.1)得到的关系

$$\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}=0 \tag{6.3}$$

合并处理即可。这样的近似是 Oseen (1910) 为了改善 Stokes 近似而提出的。

特别在物体表面 $u_1=0$,所以 $u_1'=-u_0$,在其附近 $u_1'$ 不一定小于 $u_0$。但若 Reynolds 数很小时,在物体附近粘性影响很显著,由惯性项的近似化仅发生很小的誤差。在此意义下,Oseen 近似法可看作处理小 Reynolds 数的流的适当方法。

若設

$$\left.\begin{aligned} u_1'&=\frac{\partial\phi}{\partial x_1}+\frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial x_1}-\chi, \quad p=-\rho u_0\frac{\partial\phi}{\partial x_1},\\ u_i'&=\frac{\partial\phi}{\partial x_i}+\frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial x_i} \qquad (i=2,\ 3),\end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

則(6.2) 及 (6.3)可得到満足(Lamb, 1911)。这里 $k=u_0/2\nu$,且 $\phi$ 及 $\chi$ 各为满足

$$\nabla^2\phi=0, \tag{6.5}$$

$$\left(\nabla^2-2k\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\chi=0 \tag{6.6}$$

的函数❶。現在特别选取中心在原点且半徑为 $a$ 的球当作所考虑的物体,且用(5.6)定义的球面坐标 $(r,\ \theta,\ \varphi)$ 代替直交坐标 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ 时,則(6.5)及(6.6)的解可各用

$$\phi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta), \tag{6.7}$$

$$\chi=\left(\frac{\pi}{2kr}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-kr\cos\theta}\sum_{n=0}^{\infty}B_nK_{n+\frac{1}{2}}(kr)P_n(\cos\theta) \tag{6.8}$$

❶ 可参阅 Кочин: Теоретическая гидромеханика (II), 第二章§25。——校者注

給出来(Goldstein, 1929)。这里 $P_n$ 是 $n$ 阶 Legendre 函数，$K_{n+\frac{1}{2}}$ 是半整数阶的 Bessel 函数。在(6.7)里省略去 $r$ 的正幂項，(6.8)里省略去含有 Bessel 函数 $I_{n+\frac{1}{2}}(kr)$ 的項，則在无限远处 $u_i'=0$ 的条件自然地得到滿足。$u_i'$ 在 $r$ 及 $\theta$ 的增加方向的分量，由(6.4)及(5.6)各給出为

$$\left.\begin{aligned} u' &= \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{2k}\frac{\partial \chi}{\partial r} - \chi\cos\theta, \\ v' &= \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{1}{2kr}\frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \chi\sin\theta, \end{aligned}\right\} \tag{6.9}$$

但它們还必須滿足球面上的边界条件

$$r=a:\quad u'=-u_0\cos\theta,\ v'=u_0\sin\theta. \tag{6.10}$$

利用这个条件，可将(6.7)及(6.8)里的积分常数 $A_n$ 及 $B_n$ 完全决定。

如(6.4)或(6.9)所示，速度分量由 $\phi$ 的部分和 $\chi$ 的部分所組成。$\phi$ 滿足(6.5)，所以由 $\phi$ 所組成的部分是无旋运动(参看 § 1)。与此相反，由 $\chi$ 所組成的部分表示有旋运动。今考虑远离球的地方($r$ 很大)，則❶ $K_{n+\frac{1}{2}}(kr)\approx(\pi/2kr)^{\frac{1}{2}}e^{-kr}$，所以

$$\left.\begin{aligned} \phi &\approx \frac{A_0}{r}, \\ \chi &\approx \frac{\pi}{2kr}\exp\left(-2kr\sin^2\frac{1}{2}\theta\right)\sum_{n=0}^{\infty}B_nP_n(\cos\theta). \end{aligned}\right\} \tag{6.11}$$

因为 $\chi$ 含有指数函数 $\exp\left(-2kr\sin^2\frac{1}{2}\theta\right)$，所以对于很大的 $r$ 值，当 $\theta$ 在$(kr)^{-\frac{1}{2}}$量級的小范圍內时，才具有能够看得出来的大小。也就是說，渦量只能在这样的 $\theta$ 的范圍里才存在，这个范圍叫作"伴流"。将(6.11)代入到(6.9)里，为簡单起見，命

$$F(\theta)=(1+\cos\theta)\sum_{n=0}^{\infty}B_nP_n(\cos\theta),$$

❶ 例如可見 Н. Н. 列別捷夫著《特殊函数及其应用》§ 5.11。——校者注

則有

$$u' \approx -\frac{A_0}{r^2} - \frac{\pi}{4kr}\exp\left(-2kr\sin^2\frac{1}{2}\theta\right)F(\theta), \qquad (6.12)$$

$u'$ 在伴流內具有 $(kr)^{-1}$ 的量級，伴流外具有 $r^{-2}$ 的量級，这是容易知道的。

今取中心在原点且包圍着該球的另一半徑 $r$ 相当大的球面 $S$，則对于沿着 $S$ 所作的 $u'$ 的积分，必有

$$\int u'dS = 0 \qquad (6.13)$$

成立(連續性条件)。將(6.12)代入到(6.13)，得

$$-\int_0^\pi\int_0^{2\pi} A_0\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$-\frac{\pi}{4kr}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\exp\left(-2kr\sin^2\frac{1}{2}\theta\right)F(\theta)r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 0, \quad (6.14)$$

容易看出第一項等于 $-4\pi A_0$，第二項里关于 $\theta$ 的积分取自 0 到 $\varepsilon$ 就够了，$\varepsilon$ 比 $(kr)^{-\frac{1}{2}}$ 要大些，但也可看作是非常小的值。在此用 $\theta$ 代替 $\sin\theta$，更設 $kr/2 = H^2$，$H\theta = t$，則第二項变成

$$-I = -\frac{\pi r}{4k}\int_0^\varepsilon\int_0^{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}kr\theta^2\right)F(\theta)\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= -\frac{\pi^2}{k^2}\int_0^{H\varepsilon} e^{-t^2}F\left(\frac{t}{H}\right)t\, dt,$$

在 $r\to\infty$ 的极限情形，有

$$I = \frac{\pi^2}{k^2}\int_0^\infty e^{-t^2}F(0)t\, dt = \frac{\pi^2}{k^2}\sum_{n=0}^\infty B_n. \qquad (6.15)$$

于是由(6.14)得到积分常数間的关系

$$-4\pi A_0 + \frac{\pi^3}{k^2}\sum_{n=0}^\infty B_n = 0, \qquad (6.16)$$

由物理学观点，这就是沿着伴流向球的方向的流入量 $I$ 等于自伴流以外部分的流出量 $-4\pi A_0$。在图 6.1 里，用含有 $x_1$ 軸的平面上

的流綫❶将这种流的状态表示出来。在图 6.1 里的虚綫是表示伴

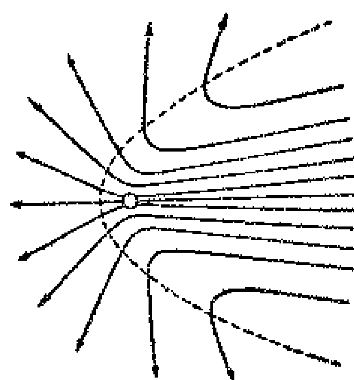


图 6.1

流大略范围的抛物面。将此和用 Stokes 近似得来的流綫(图 5.1)作比較，就可看出在球附近的显著的区别来。若 Reynolds 数无限地趋近于 0 时，抛物面向左方移动，图 6.1 的流綫就接近于图 5.1 的流綫。

在計算球所受的阻力 $D$ 时，仿照 §5 将作用在其表面上的应力在 $x_1$ 方向的分量作积分，或者对球面和 $S$ 面間所夹着的流体部分运用动量法則即可。按照后一种方法，得

$$D = X - M, \tag{6.17}$$

但 $X$ 是由 $S$ 所受的外側流体作用的力在 $x_1$ 方向的分量，$M$ 是在单位时間内通过 $S$ 面流出的动量在 $x_1$ 方向的分量。若設 $S$ 的外向法綫方向余弦是 $l_i$，应力在 $x_1$ 方向的分量为 $p'_{i1}$，則有

$$X = \int l_i p'_{i1}\, dS,$$

但 $p'_{i1}$ 是在(1.6)和(1.11)里用 $u'_i$ 代替 $u_i$，且設 $\mathfrak{D}=0$ 而得到的。利用 Green 定理，(6.3)及(6.4)，得到

$$X = \int\left(\rho u_0 l_1 \frac{\partial\phi}{\partial x_1} - \mu l_2 \frac{\partial\chi}{\partial x_2} - \mu l_3 \frac{\partial\chi}{\partial x_3}\right) dS.$$

其次，在

$$\begin{aligned} M &= \int \rho (u_0 \cos\theta + u')(u_0 + u'_1)\, dS \\ &= \int \rho u_0^2 \cos\theta\, dS + \int \rho u_0 (u' + u'_1 \cos\theta)\, dS + \int \rho u' u'_1\, dS \end{aligned}$$

里，第二行的第一项及第三项都等于零，更考虑(6.13)及(6.16)

---

❶ 这个流綫用 $\frac{dx_1}{u'_1} = \frac{dx_2}{u'_2} = \frac{dx_3}{u'_3}$ 来定义，是球在靜止流体里运动时的流綫。

时，得到

$$D-\int\rho u_0\frac{\partial\phi}{\partial r}dS=\rho u_0 I. \tag{6.18}$$

也就是說，球所受到的阻力等于沿着伴流的流入量的 $\rho u_0$ 倍。使用无因次的阻力系数 $C_D=D\Big/\frac{1}{2}\rho u_0^2\pi a^2$，更参照(6.15)則得

$$C_D=\frac{32\pi}{R^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{u_0}. \tag{6.19}$$

$R$ 是由(5.5)定义的 Reynolds 数。

Goldstein(1929)用公式(6.19)計算出 $C_D$ 的值，如表6.1。又当 $R$ 十分小时，將計算里出現的各个量都用 $R$ 的級数展开，則得(Goldstein, 1929)

$$C_D=\frac{24}{R}\left(1+\frac{3}{16}R-\frac{19}{1280}R^2+\cdots\right). \tag{6.20}$$

此級数在 $R<2$ 的范圍内是收斂的。包含級数展开的第二項的近似由 Oseen (1913) 本人用別的解法求得。采取第二項作的計算結果見表6.1，并用图5.2表示。

用 Oseen 近似要提高解的精密度时，可以將上边所得結果代入到作慣性項綫性化时所略去的項里，反复应用同样的計算(Filon, 1928; Goldstein, 1933; 今井, 1951)。但在这样得到的結果里 $C_D$ 关于 $R$ 的展开式内，和(6.20)不同的只有在第三項

表 6.1

| $R$ | $\frac{24}{R}\left(1+\frac{3}{16}R\right)$ | $C_D$ Goldstein |
|---|---|---|
| 0.2 | 124.50 | 124.44 |
| 0.4 | 64.50 | 64.36 |
| 0.6 | 44.50 | 44.32 |
| 0.8 | 34.50 | 34.26 |
| 1.0 | 28.50 | 28.22 |
| 1.2 | 24.50 | 24.16 |
| 1.4 | 21.64 | 21.26 |
| 1.6 | 19.50 | 19.08 |
| 1.8 | 17.83 | 17.38 |
| 2.0 | 16.50 | 16.00 |
| 2.5 | 14.10 | 13.52 |
| 3.0 | 12.50 | 11.86 |
| 3.5 | 11.36 | 10.66 |
| 4.0 | 10.50 | 9.74 |
| 5.0 | 9.30 | 8.44 |
| 6.0 | 8.50 | 7.56 |
| 8.0 | 7.50 | 6.42 |
| 10.0 | 6.90 | 5.70 |

以后(桥本,1954)。在这样的意义下,可以认为上述结果較好的适用范圍就是将(6.20)第三項以后可以省略去的范圍(例如 $R<2$)。

这样看来,至少在阻力法则的范圍里,Oseen 近似比 Stokes 近似并无特别显著的改进,但当正确地記述远离物体处的流时,就可看出它的重要特性来。由于这个特性,用 Stokes 近似不能借助于逐次近似以提高精密度的工作,用 Oseen 近似却可以完成。又如下所說,也有可能处理二維問題了。

将无限长圓柱(半徑 $a$)放置在均匀流(速度 $u_0$)里的問題,可用与球的情形的同样方法解决(Lamb, 1911; 友近,青井,1950)。将圓柱单位长的阻力除以 $\frac{1}{2}\rho u_0^2\cdot 2a$ 而得的阻力系数可写成

$$C_D=\frac{8\pi}{R}\frac{1}{T+\frac{1}{2}}\left[1-\frac{R^2}{32}\left(T+\frac{5}{16}\frac{1}{T+\frac{1}{2}}\right)+\cdots\right] \tag{6.21}$$

($R=2au_0/\nu$, $T=\ln(8/R)-\gamma$, $\gamma=0.5772\cdots$ 是 Euler 常数)。在上式中,取到第二項为止所作的計算的結果和实驗值的比較,如图 6.2 所示。又若使 $C_D$ 的表达式的第一項和 (5.19) 右边相等,则决定 $A$ 的边界条件就相当于 $r\approx3.7\nu/u_0$ 时,(5.20) 的 $u_1$ 和 $u_0$ 是一致的。这个 $r$ 值可以看作是和表示伴流范圍的抛物柱面的頂点相当的值。又在圓柱周圍的流綫❶,例如当 $R=0.25$

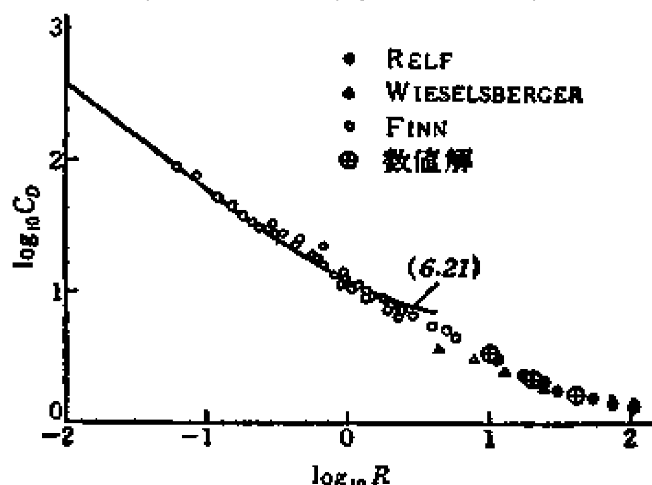


图 6.2

❶ 这个流綫用 $\frac{dx_1}{u_1}=\frac{dx_2}{u_2}$ 定义,所以均匀流在静止圓柱周圍沿 $x_1$ 軸正向流动时的流綫就是这个情形。

的情形可表示为图 6.3，但在此有趣的是当圓柱背后存在着平稳的渦对。按計算結果，这个渦在 $R$ 更小的情形也存在，其区域随 $R$ 的增加而增加（友近，青井，1950）。

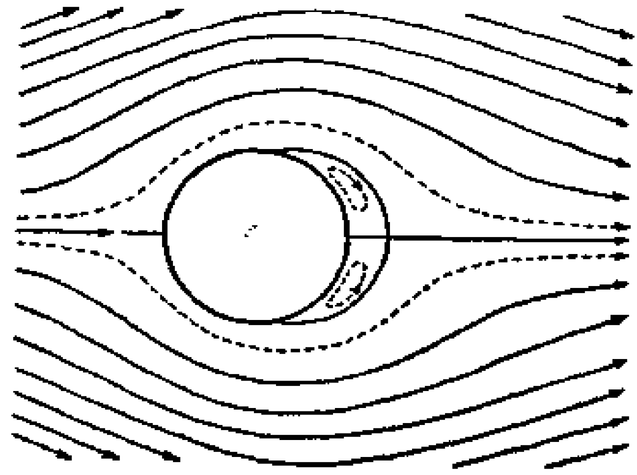


图 6.3

无限长橢圓柱面放置在均匀流里的情形也可同样处理(Harrison, 1923;友近,青井,1953)。这个問題也可用保角映射的方法来解决（今井，1954）。特别是令橢圓的短徑趋于零，就得到无厚平板放置在均匀流里的情形。当平板和均匀流平行时，作用在平板上的阻力叫作"摩阻"。将平板一面的每单位寬度的阻力除以 $\frac{1}{2}\rho u_0^2 l$（$l$ 是平板的长），即得摩阻系数

$$C_f=\frac{4\pi}{R}\frac{1}{T+1}\left[1-\frac{R^2}{128}\left(T-\frac{5}{12}\frac{1}{T+1}\right)+\cdots\right] \quad (6.22)$$

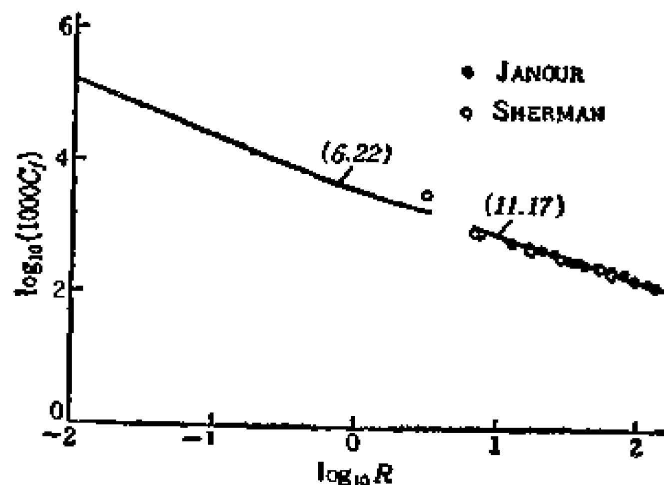



图 6.4

($R=lu_0/\nu$, $T=\ln(16/R)-\gamma$)。在这个展开式里取到 $R^2$ 項为止所作的計算的結果和实驗結果比較，就得到图 6.4（更参照图 11.1）。

## §7 Reynolds 数不很小的情形

前两节讲过的 Stokes 和 Oseen 的近似解法，当 Reynolds 数不很小时不能适用。实际上用这些近似所計算的球或圓柱的阻力，在对于直徑的 Reynolds 数 $R$ 有 10 的量級时就和实驗值有相当大的差异（图 5.2 及图 6.2）。当 $R$ 有 10 以上的量級时，还未找到一般适用的近似解法，对不同的問題，除了作数值解法外，并无其他办法。下面我們对无限长圓柱（半徑 $a$）放置在 $x_1$ 軸方向的均匀流（速度 $u_0$）里的情形，介紹几种解法。

为了使連續方程得到滿足，使用(5.15)所定义的流函数 $\psi$，它可用由 N. S. 方程导出的偏微分方程(5.16)所决定。今导入渦量在 $x_3$ 方向的分量 $\omega_3=\partial u_2/\partial x_1-\partial u_1/\partial x_2$，且各用 $x$, $y$ 及 $\zeta$ 代替 $x_1$, $x_2$ 及 $\omega_3$，則有

$$\nabla^2\psi=-\zeta, \tag{7.1}$$

又(5.16)可写成

$$\nabla^2\zeta=\frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) \tag{7.2}$$

$$\left(\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

用所謂 Liebmann 方法作(7.1)及(7.2)的数值积分。在这一方法里，将所考虑的区域分割成边长为 $n$ 的正方形网格，在点 O 的任意函数 $f$ 的值用

$$f_0=f_M-\frac{n^2}{4}\nabla^2 f+O(n^4)$$

来作近似。$f_M$ 表示和 $O$ 点最接近的四点 1, 2, 3, 4 的 $f$ 的值的

算术平均(图7.1)。用差分代替导数,例如将$(\psi_2-\psi_4)/2n$, …等代替$\partial\psi/\partial x$, …, (7.1)及(7.2)各变为

$$\left.\begin{aligned}\psi_0&=\frac{1}{4}(\psi_1+\psi_2+\psi_3+\psi_4)+\frac{n^2}{4}\zeta_0,\\ \zeta_0&=\frac{1}{4}(\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3+\zeta_4)+\frac{1}{16\nu}[(\psi_2-\psi_4)(\zeta_3-\zeta_1)\\ &\qquad-(\psi_3-\psi_1)(\zeta_2-\zeta_4)].\end{aligned}\right\}\tag{7.3}$$

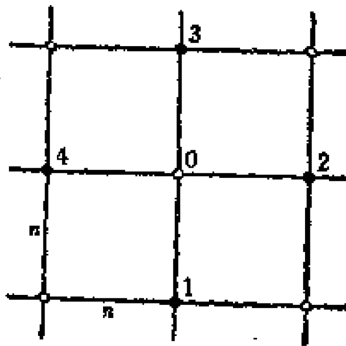



图 7.1

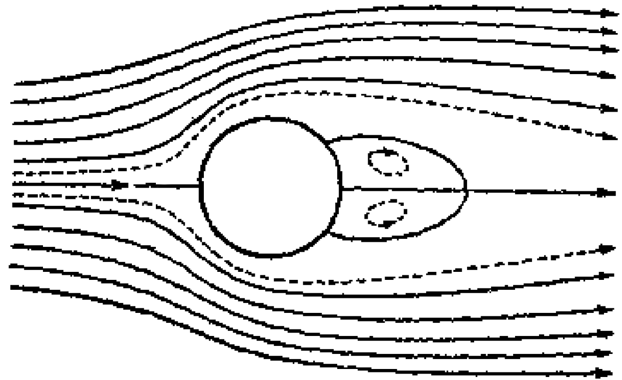


图 7.2

利用逐次近似来解这些方程,首先在网格各点假定$\psi$及$\zeta$的适当値,而后用(7.3)加以修正,反复地作同样手續。若这样所得的序列收斂的話,其結果就是(7.1)及(7.2)的近似解。

用这个方法已計算出$R=10$, 20的情形(Thom, 1929, 1933)及$R=40$的情形(川口,1953)。根据这个結果所得到的阻力系数和实驗値很能符合,如图6.2。又将圆柱周圍的流綫表示如图7.2($R=20$)及图7.3($R=40$);这里有趣的是图6.3($R=0.25$)所画出渦的区域随着$R$的

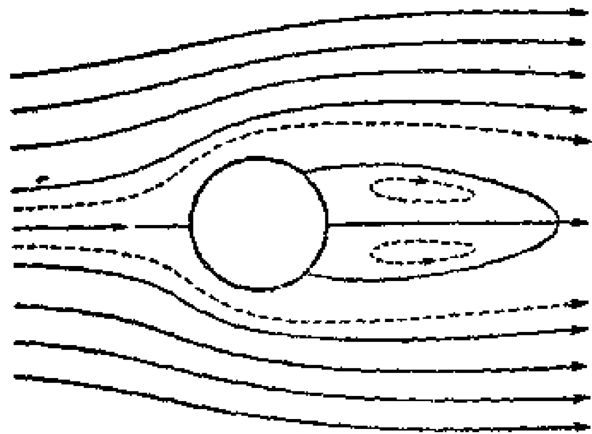


图 7.3

值一同显著地增加，且向流的方向逐渐伸长。这些流綫也符合观察的結果。特别在实际情形，当 $R$ 大致超过 40 时，对称的渦变为不稳定的而且相互交叉地离开，因而在圓柱下部的流形成所謂 Kármán 交叉渦列。即使对于这样大的 $R$ 值，N S. 方程大概也能有定常的解，但却不是最稳定的解，可以认为用含有渦的交叉脫离的不定常解来代替它是可以实现的。

上面所說的数値解法，在定常解稳定范圍里可以給出好的結果，但需要很大的計算劳力。不仅如此，而且还不适于討論定常解的稳定性的目的，所以我們希望能找到可以代替它的更好的解析的近似解法。关于这方面，我們現在也只能举出川口 (1948) 用 Galerkin 方法所作的尝試如下：

用极坐标 $(r, \theta)$

$$x_1 = r\cos\theta, \qquad x_2 = r\sin\theta \tag{7.4}$$

代替直角坐标 $(x_1, x_2)$ 时，(5.16) 变为

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial\theta}-\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial r}\right]+\nu\nabla^4\psi=0 \tag{7.5}$$

$\left(\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+r^{-1}\frac{\partial}{\partial r}+r^{-2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)$，边界条件为

$$\left.\begin{array}{lll} r=a: & \psi=0, & \dfrac{\partial\psi}{\partial r}=0, \\ r=\infty: & \psi=u_0 r\sin\theta. & \end{array}\right\} \tag{7.6}$$

設

$$\psi=u_0 r\sin\theta+\left(\frac{A_1}{r}+\frac{A_3}{r^3}+\frac{A_5}{r^5}+\frac{A_7}{r^7}\right)\sin\theta$$
$$+\left(B_0+\frac{B_2}{r^2}+\frac{B_4}{r^4}+\frac{B_6}{r^6}\right)\sin 2\theta, \tag{7.7}$$

它能够滿足在无限远处的边界条件，为了決定八个未定系数 $A_1$，

$A_3$, …, 利用它在圆柱表面应满足边界条件(7.6)❶, 以及将(7.5)的左侧各乘以 $\sin\theta$ 及 $\sin 2\theta$, 在圆柱外部的区域中的积分必均为零的事实。这样求得的流綫及压力分布和由数值积分所得的結果, 是定性地符合的, 但在定量方面却有一些差别, 不能説是十分精密的。又同样的計算对于球面也有人作过(川口, 1948), 此外, 还計算了使定常解对于微小扰动丧失稳定性的 Reynolds 数的界限(川口, 1955)。

❶ 原书誤写为(7.5)。——校者注

# 第3章 边 界 层

本章和前章相反，将考虑粘性非常小而 Reynolds 数非常大的流。在此情形如 §3 所說，粘性影响仅限于接近物体表面的薄层，其外側用无粘性流体的无旋运动大体上能正确地記述出来。Prandtl (1904) 将这个薄层叫作“边界层”，他又指出 N. S. 方程在其內可以大大地化簡。我們这里首先在 §8 里就定常二維不可压縮流說明这个事实，然后在 §9 及 §10 叙述簡化后的方程的解法。最后在 §11～§13 討論提高解的近似程度的方法以及考虑到三維性和压縮性时的方法。

## §8 边界层的方程

为了簡单起見，首先考虑不可压縮流体的定常二維流，且假定流的状态在 $z$ 軸方向不变，而物体表面是含在 $x$-$z$ 平面里的。設 $x$ 軸及 $y$ 軸方向的速度分量各为 $u$ 及 $v$，压力是 $p$，密度是 $\rho$，粘性系数是 $\mu$，則連續方程(2.1)及 N. S. 方程(2.2)各变为

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{8.1}$$

$$\left.\begin{aligned}\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)&=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\\ \rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)&=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right),\end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

物体表面的边界条件是

$$y=0:\quad u=0,\ v=0. \tag{8.3}$$

大 Reynolds 数流的特性之一，是在离开表面很近处可以出現无旋运动，但这个无旋运动在接近表面处有有限的切綫速度。这个速

度逐渐减小直到表面上变为零的范围就是边界层，将粘性影响看作只局限在这个薄层里就行了。正由于这个薄层的性质，N.S. 方程才能得到很大的簡化。

設 $\delta$ 是边界层的厚度，$l$ 是和它相对应的 $x$ 方向的代表长度(例如均匀流的方向的物体的长度)，更用

$$x=lX,\quad y=\delta Y$$

导入无因次量 $X$ 及 $Y$，将(8.1)对 $y$ 自 0 到 $\delta$ 作积分而考虑条件(8.3)时，则得

$$(v)_{y=\delta}=-\int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x}\,dy=-\frac{\delta}{l}\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial X}\,dY,$$

但因 $X$ 和 $Y$ 都仅在 0 到 1 的范圍內变化，故知 $v$ 和 $(\delta/l)u$ 是同量级的量。又(8.2)的第一式变为

$$\frac{\rho}{l}\left(u\frac{\partial u}{\partial X}+\frac{l}{\delta}v\frac{\partial u}{\partial Y}\right)=-\frac{1}{l}\frac{\partial p}{\partial X}+\mu\left(\frac{1}{l^2}\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}+\frac{1}{\delta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\right),$$

左边括号中的二项由于方才說过的理由而是同量級的量。与此相反，在右边括号中的二项，由于 $\delta^2/l^2$ 比 1 小得多，可以略去，故第一项比起第二项来也可以略去。$\delta$ 的大小程度由左边代表项 $(\rho/l)u(\partial u/\partial X)$ 和右边代表项 $(\mu/\delta^2)$ $(\partial^2 u/\partial Y^2)$ 是同量級量的事实可以决定。但若設 $u$ 的代表值为 $u_0$，則 $\delta^2\propto\dfrac{\mu l}{\rho u_0}$，于是得到

$$\frac{\delta}{l}\propto\sqrt{\frac{\nu}{u_0 l}}.\tag{8.4}$$

换言之，边界层的厚度与流的代表长度之比，和 Reynolds 数 $u_0 l/\nu$ 的平方根成反比。

同样由(8.2)的第二式，得

$$\frac{\rho}{l}\left(u\frac{\partial v}{\partial X}+\frac{l}{\delta}v\frac{\partial v}{\partial Y}\right)=-\frac{1}{\delta}\frac{\partial p}{\partial Y}+\mu\left(\frac{1}{l^2}\frac{\partial^2 v}{\partial X^2}+\frac{1}{\delta^2}\frac{\partial^2 v}{\partial Y^2}\right),$$

左边和 $(\rho/l)uv$，于是和 $\rho u_0^2(\delta/l^2)$ 同量級，可知和它平衡的右边的 $\partial p/\partial Y$ 必是 $\rho u_0^2(\delta^2/l^2)$ 量級的量。若这里的 $\delta^2/l^2$ 和 1 比起来可以

略去时，就可看作 $\partial p/\partial Y=0$，于是压力 $p$ 在边界层里必在 $y$ 方向不变。

这样，就可在边界层里将(8.2)化简为

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{8.5}$$

的形状 (Prandtl 边界层方程)❶。$p$ 仅是 $x$ 的函数，在 $y$ 方向不变，所以它和边界层外侧流的压力应相等。而外侧流可以略去粘性影响，所以必成立无旋运动的 Bernoulli 方程(参照 § 1)

$$-\frac{dp}{dx}=\rho u_1\frac{du_1}{dx}. \tag{8.6}$$

$u_1$ 是边界层外侧的 $u$ 值。所以(8.5)变成

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=u_1\frac{du_1}{dx}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{8.7}$$

若 $u_1$ 已知为 $x$ 的函数，将(8.7)在条件(8.1)及(8.3)下求解，则 $u$ 及 $v$ 都可决定为 $x$ 及 $y$ 的函数。为了满足(8.1)，导入由

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{8.8}$$

定义的流函数 $\psi$ 来代替 $u$ 及 $v$，这是經常采用的方法。此时(8.7)变为

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=u_1\frac{du_1}{dx}+\nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}. \tag{8.9}$$

和(8.3)相当的对于 $\psi$ 的边界条件是

$$y=0:\quad \psi=0,\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=0; \tag{8.10}$$

和在边界层外侧 $u=u_1$ 相当的是

$$y=\delta:\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=u_1. \tag{8.11}$$

---

❶ 在这个方程里的独立变数又回到 $x$ 及 $y$，但在应用这个方程时必须注意到 $y$ 的值不能超过 $\delta$ 量級的事实。

边界层方程(8.5)或(8.7)是将 N. S. 方程中較小的項略去而得的，所以解它而得到的結果是第1阶近似的解。特别地缺少在 $y=\delta$ 处对于 $v$ 的边界条件，这是因为 $v$ 比起 $u$ 来是 $\delta/l$ 量級的，所以允許略去这个条件。这个事实和在作为解的基础的外側无旋运动里略去 $\delta/l$ 量級的項等价。为了提高近似的精密度，必須在略去的項里将第1阶近似解代入而求第2阶近似解。$\delta/l$ 和 Reynolds 数的平方根成反比，所以这个逐次近似就相当于将解按 Reynolds 数的平方根的倒数作冪級数展开。在一般情形 Reynolds 数十分大时，仅用第1阶近似解就可得到很好的精密度。但在 Reynolds 数不大的情形，就有考虑逐次近似的必要。在§11还要詳細叙述有关这方面的事項。

又在推导边界层方程(8.5)时，仅考虑过物体表面是平面的情形，然若表面有曲率时，沿着表面取 $x$ 軸，垂直于表面取 $y$ 軸，命各方向的速度分量为 $u$ 及 $v$，也可以采用同一形状的方程。这个事实可証明如下：首先将連續方程(8.1)变到这样的曲綫坐标时，则有

$$\frac{1}{1+\varkappa y}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\varkappa v}{1+\varkappa y}=0; \tag{8.12}$$

同样，N. S. 方程由(8.2)变为

$$\left.\begin{aligned}
&\rho\left[\frac{1}{1+\varkappa y}u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\varkappa uv}{1+\varkappa y}\right]=-\frac{1}{1+\varkappa y}\frac{\partial p}{\partial x}\\
&\quad+\mu\left[\frac{1}{(1+\varkappa y)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\varkappa}{1+\varkappa y}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\varkappa^2 u}{(1+\varkappa y)^2}\right.\\
&\quad\left.+\frac{2\varkappa}{(1+\varkappa y)^2}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{y}{(1+\varkappa y)^3}\frac{d\varkappa}{dx}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{(1+\varkappa y)^3}\frac{d\varkappa}{dx}v\right],\\
&\rho\left[\frac{1}{1+\varkappa y}u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\varkappa u^2}{1+\varkappa y}\right]=-\frac{\partial p}{\partial y}\\
&\quad+\mu\left[\frac{1}{(1+\varkappa y)^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\varkappa}{1+\varkappa y}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\varkappa^2 v}{(1+\varkappa y)^2}\right.\\
&\quad\left.-\frac{2\varkappa}{(1+\varkappa y)^2}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{y}{(1+\varkappa y)^3}\frac{d\varkappa}{dx}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{1}{(1+\varkappa y)^3}\frac{d\varkappa}{dx}u\right].
\end{aligned}\right\}\tag{8.13}$$

在这里和导出(8.5)时同样考虑各項的量級。$\varkappa$ 是表面的曲率，向外側凸时是正的。今若考慮 $\varkappa$ 及 $\frac{d\varkappa}{dx}$ 的最大値各是 $1/l$ 及 $1/l^2$ 量級的情形，則(8.12)和(8.1)的形状相同，(8.13)的第二式变成

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\rho\varkappa u^2. \tag{8.14}$$

这意味着：为了和流的弯曲所生的离心力保持平衡，必須有 $y$ 方向的压力梯度。于是此时 $\partial p/\partial Y$ 应該是 $\rho u_0^2(\delta/l)$ 的量級，但 $\delta/l$ 对于1是可以略去的，故仍然可有 $\partial p/\partial Y=0$。也就是說，纵然物体表面是弯曲的，也可以将压力 $p$ 在边界层里看作是在 $y$ 方向不变的，但此时誤差是 $\delta/l$ 量級的。与此相对应，在无弯曲的情形誤差是 $\delta^2/l^2$ 量級的。又由(8.13)的第一式可导出和(8.5)同形状的方程。这样一来，边界层的方程(8.5)或(8.7)卽使在物体表面弯曲时也可以照样使用。

## §9 边界层方程的解例

我們現在举出解边界层方程的几个例題，在其中将边界层外側的速度 $u_1$ 給定为 $x$ 的簡单函数。

**1) $u_1=u_0$ (一定) 的情形** 这情形相当于将极薄的平板平行放置在速度为 $u_0$ 的均匀流里(图9.1)。取坐标原点在平板的前沿，則由实驗的观察可知边界层的厚度 $\delta$ 按 $\sqrt{x}$ 的比例增加，速度 $u$ 仅为 $y/\delta$ 的函数。由这个事实，再参照(8.4)就可想象 $u$ 仅是

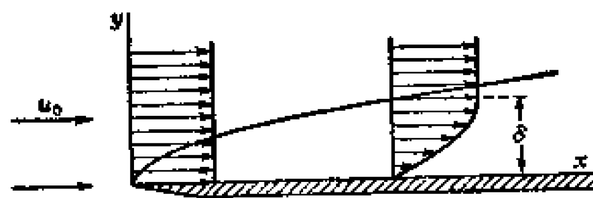


图 9.1

$$\zeta=\frac{y}{2}\sqrt{\frac{u_0}{\nu x}}\text{[1]} \tag{9.1}$$

[1] 这个 $\zeta$ 类似于§8所用过的 $Y$，但也不完全一样。按§8的注意 $\zeta$ 的値是1的量級，即假設"$\zeta$ 的大值"也不过是3量級的，参照表9.1。

的函数。实际上，假定流函数的形状为

$$\psi=\sqrt{\nu x u_0}f(\zeta),\tag{9.2}$$

则速度分量可表示为

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{1}{2}u_0f',\quad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu u_0}{x}}(\zeta f'-f)\tag{9.3}$$

(撇号表示对 $\zeta$ 的导数)。将这些值代入(8.7)，得到决定 $f$ 的微分方程

$$f'''+ff''=0.\tag{9.4}$$

为了在平板表面上有条件 $u=v=0$，由(8.10)给出

$$\text{在}\quad \zeta=0:\quad f=0,\ f'=0.\tag{9.5}$$

又在边界层外侧有条件 $u=u_0$，由(8.11)给出

$$\text{在}\quad \zeta=\infty❶:\quad f'=2.\tag{9.6}$$

对于小的 $\zeta$ 值，方程(9.4)的解是将 $f$ 展成 $\zeta$ 的幂级数而求得的。满足条件(9.5)的解由下列级数给出：

$$f=\frac{A\zeta^2}{2!}-\frac{A^2\zeta^5}{5!}+\frac{11A^3\zeta^8}{8!}-\frac{375A^4\zeta^{11}}{11!}+\frac{27897A^5\zeta^{14}}{14!}-\frac{3817137A^6\zeta^{17}}{17!}+\cdots.\tag{9.7}$$

但 $A=f''(0)$ 是未定的。对于 $\zeta$ 的大值考虑到条件(9.6)时，作为第1阶近似取 $f=2\zeta-B$。因此可假定第2阶近似解是 $f=2\zeta-B+g(\zeta)$ 的形状，$g$ 比 $2\zeta-B$ 是小的，将它代入(9.4)就得到 $g'''+(2\zeta-B)g''=0$；将此方程在条件：$\zeta=\infty$ 处 $g=g'=0$ 下积分，得到

$$f=2\zeta-B+C\int_\infty^\zeta d\zeta\int_\infty^\zeta \exp\left\{-\left(\zeta-\frac{B}{2}\right)^2\right\}d\zeta.\tag{9.8}$$

为了使两个解(9.7)和(9.8)表示同一函数，在使双方都成立

---

❶ 在实际上并不考虑无限大的 $\zeta$，只是說 $\zeta$ 是足够大的，有可以伸进到外侧的无旋流的范圍的量級的距离。

的$\zeta$的范圍里，$f$，$f'$及$f''$的值都必須是一致的。于是由这个条件可決定未定系数的值如下：

$$A=1.327,\quad B=1.731,\quad C=0.923.$$

这是 Blasius (1908) 計算的結果。

設在$A=1$时的解为$f_*(\zeta)$，則(9.7)可改写为

$$f(\zeta)=A^{\frac{1}{3}}f_*(A^{\frac{1}{3}}\zeta). \tag{9.9}$$

这种相似变換其实并不仅适用于展开式(9.7)，将它代入(9.4)，可以看出对一般情形都是可以成立的。于是条件(9.6)可写成

$$f'(\infty)=A^{\frac{2}{3}}f_*'(\infty)=2. \tag{9.10}$$

今取$f_*(0)=f_*'(0)=0$，$f_*''(0)=1$，从$\zeta=0$开始对$f_*'''+f_*f_*''=0$作数值积分，則对于充分大的$\zeta$，$f_*'$漸近于一定値$f_*'(\infty)$。将此值代入(9.10)，就可决定$A$的值。其次，利用$A$的这个值，取$f(0)=f'(0)=0$，$f''(0)=A$，更对$f'''+ff''=0$作数值积分，則对于充分大的$\zeta$值，$f'$应該漸近于2，这对計算是很有用的。这种計算是 Töpfer (1912) 开始的，之后由 Howarth (1938) 及谷 (1945)給出詳細数值。抽出其中一部分列成表9.1。按照这些結果，

$$A=1.3282,\quad B=1.7208,\quad C=0.9349,$$

虽和Blasius的值稍有出入，但由数值积分得到的結果在数值上总是可以信賴的。将表9.1的数值用图表示出来就得图9.2，它表示边界层里的速度$u$的分布。

为了計算平板所受的摩阻，可将表面上的粘性应力(卽表面摩擦应力)

$$\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}=\frac{A}{4}\rho u_0\sqrt{\nu u_0/x}$$

对$x$自0到$l$(平板长度)作积分。得到单位寬度上平板单側的摩阻

表 9.1

| $\zeta$ | $f$ | $f'$ | $f''$ |
|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.00000 | 0.00000 | 1.32823 |
| 0.2 | 0.02656 | 0.26553 | 1.32588 |
| 0.4 | 0.10611 | 0.52942 | 1.30956 |
| 0.6 | 0.23795 | 0.78755 | 1.26636 |
| 0.8 | 0.42032 | 1.03351 | 1.18665 |
| 1.0 | 0.65002 | 1.25953 | 1.06701 |
| 1.2 | 0.92229 | 1.45796 | 0.91237 |
| 1.4 | 1.23098 | 1.62302 | 0.73603 |
| 1.6 | 1.56909 | 1.75216 | 0.55651 |
| 1.8 | 1.92953 | 1.84666 | 0.39235 |
| 2.0 | 2.30575 | 1.91104 | 0.25694 |
| 2.2 | 2.69236 | 1.95174 | 0.15589 |
| 2.4 | 3.08532 | 1.97558 | 0.08748 |
| 2.6 | 3.48187 | 1.98849 | 0.04537 |
| 2.8 | 3.88029 | 1.99496 | 0.02173 |
| 3.0 | 4.27962 | 1.99795 | 0.00961 |
| 3.2 | 4.67936 | 1.99922 | 0.00392 |
| 3.4 | 5.07926 | 1.99973 | 0.00148 |
| 3.6 | 5.47923 | 1.99991 | 0.00051 |
| 3.8 | 5.87922 | 1.99997 | 0.00017 |
| 4.0 | 6.27921 | 1.99999 | 0.00005 |
| 4.2 | 6.67921 | 2.00000 | 0.00001 |
| 4.4 | 7.07921 | 2.00000 | 0.00000 |

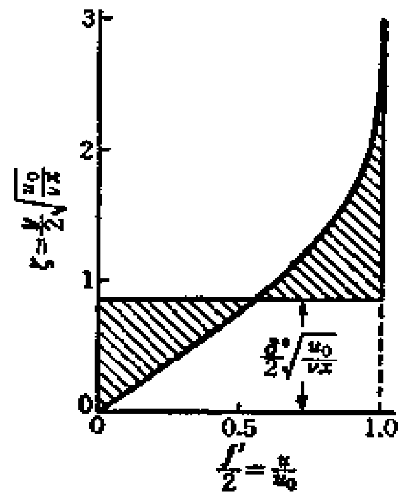



图 9.2

$$F=\frac{A}{4}\rho u_0\int_0^l\sqrt{\frac{\nu u_0}{x}}\,dx=\frac{A}{2}\rho u_0^2 l\sqrt{\frac{\nu}{u_0 l}},\tag{9.11}$$

无因次的摩阻系数则为

$$C_f=\frac{F}{(\rho u_0^2/2)l}=A\sqrt{\frac{\nu}{u_0 l}}=1.3282\sqrt{\frac{\nu}{u_0 l}}.\tag{9.12}$$

这个关系如图 11.1 指示的那样，在 Reynolds 数 $R=u_0 l/\nu$ 充分大的地方頗能与实验結果一致❶。

在边界层里速度减小，所以自平板表面的某一厚度起就不存在均匀流。設此厚度是 $\delta^*$，边界层外側的任意点的距离是 $y_1$，则

$$u_0(y_1-\delta^*)=\int_0^{y_1}u\,dy$$

❶ 比方說 Reynolds 数大于 $10^4$ 就够了。特别是 Reynolds 数非常大时，流的状态就变成紊流。所以在此情形不能有(9.12)成立(参照 § 3)。又当 Reynolds 数不十分大时可参照 § 11。

成立。由此得

$$u_0\delta^* = \int_0^{y_1}(u_0-u)\,dy = u_0[2\zeta_1 - f(\zeta_1)]\sqrt{\frac{\nu x}{u_0}},$$

此处的 $2\zeta_1-f(\zeta_1)$ 可用对应于 $\zeta$ 的大値的漸近值 $B$ 代入。于是得到

$$\delta^* = B\sqrt{\frac{\nu x}{u_0}} = 1.7208\sqrt{\frac{\nu x}{u_0}}. \tag{9.13}$$

又对于 $\zeta$ 的大値，$v$ 趋近于 $v_1=(B/2)\sqrt{\nu u_0/x}$。所以有关系式❶：

$$\frac{v_1}{u_0} = \frac{B}{2}\sqrt{\frac{\nu}{u_0 x}} = \frac{d\delta^*}{dx}. \tag{9.14}$$

利用这些結果，将边界层外侧的流綫和无粘性的情形（到平板表面 $u=u_0$）作比較，显然可看出必須由外侧将厚度 $\delta^*$ 排除。$\delta^*$ 就叫作"排除厚度"，它常被使用为表示边界层厚度的一个量。为什么使 $u$ 漸近于 $u_0$? 这是因为作为粘性所及的范圍，明确地規定边界层的厚度是困难的。所以有时取 $u/u_0=0.999$ 的点为距离 $\delta$，有时定义 $\delta=3\delta^*$。后边定义的这个厚度在现在的例子里相当于 $u/u_0=$ $=0.999$ 的点。

**2) $u_1=cx^m$ 的情形**（$c$ 及 $m$ 是常数）　这时的速度分布，比方說可用方向仅变更角度 $m\pi/(1+m)$ 的非粘性流体来实現（图 9.3）。具体地說来，$m=0$ 时是 1) 所說过的沿着平板的流，$m=1$ 时是鈍头物体流綫在两侧分歧点附近的流（参照 §2, 3) 的駐点）。当 $m<0$ 时，$u_1$ 在 $x=0$ 处是无穷大，必須将它的近傍除外



图　9.3

❶ 由此式可知，当 $x$ 趋近于 0 时，$v_1/u_0$ 将无限地增大，但这和导出边界层方程时的假定有矛盾。这里所作計算，对于使 $u_0x/\nu$ 十分大的 $x$ 是成立的。所以不能适用于十分接近前沿 $x=0$ 的地方。

后才可以考虑。即使在这样一般速度分布的情形，也可和平板情形同样将 $x$ 及 $y$ 归結到一个变数

$$\zeta=\frac{y}{2}\sqrt{\frac{u_1}{\nu x}}, \tag{9.15}$$

于是 $u/u_1$ 仅为 $\zeta$ 的函数的类似情况也成立。若假定流函数的形状是

$$\psi=\sqrt{\nu x u_1}f(\zeta), \tag{9.16}$$

则由(8.9)可得 $f$ 的微分方程为

$$f'''+(1+m)ff''-2mf'^2+8m=0 \tag{9.17}$$

(撇号表示对于 $\zeta$ 的导数)(Falkner 及 Skan, 1930)。更設

$$\sqrt{2(1+m)}\zeta=Z,\quad \sqrt{\frac{1+m}{2}}f=F,\quad \frac{2m}{1+m}=\beta, \tag{9.18}$$

则得决定 $F$ 的微分方程

$$F'''+FF''=\beta(F'^2-1) \tag{9.19}$$

(撇号表示对于 $Z$ 的导数)，其边界条件为

$$Z=0:\ F=0,\ F'=0;\quad Z=\infty:\ F'=1. \tag{9.20}$$

Hartree (1937) 曾自 $Z=0$ 出发将微分方程(9.19)作数值积分。当 $m>0$ 时，$\beta>0$，方程的解可唯一地决定，当 $-1<m<0$ 时，$\beta<0$，则在 $Z=\infty$ 时 $F'=1$ 的条件不拘 $Z=0$ 时 $F''$ 取怎样的值都可滿足。但只有当 $F''(0)$ 取某些特定值时 $F'$ 才可以自小于1的值向1逼近。大概只限于在这个情形 $1-F'$ 方能按指数函数的方式向零逼近，在其他的情形，它将按 $Z$ 的負冪次而趋近零。对于 $\beta<0$ 的情形，采用这样指定的 $F''(0)$ 开始作計算，并和 $\beta\geqslant0$ 时的速度分布作比較，就可得到图 9.4 那样的表示。

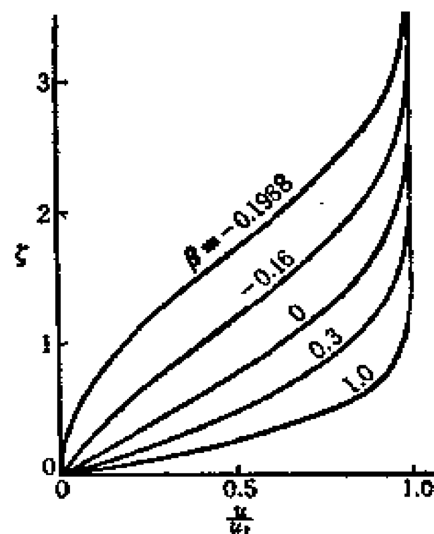


图 9.4

在这个比較里，可以明显地看出来，外侧流的性质对边界层的速度分布产生影响。和外侧流是均匀的 ($u_1$=常数，$\beta=0$) 也就是无压力梯度的情形 ($dp/dx=0$) 比較，对于“加速流” ($du_1/dx>0$, $\beta>0$) 也就是压力减少的情形 ($dp/dx<0$)，速度分布逐漸饱满起来，在接近到物体表面时存在着很大的速度。与此相反，对于“减速流”($du_1/dx<0$, $\beta<0$)的情形，也就是压力增大($dp/dx>0$)，速度分布逐漸瘦削，在接近物体表面的地方，速度逐漸减少而产生屈曲点❶。这个傾向当 $\beta$ 在負的方向越增大时也就越显著，变到 $\beta=-0.1988(m=-0.0904)$ 时，在 $y=0$ 的 $\partial u/\partial y$ 也变为零。这是表面摩擦到处为零的情形，表示出在接近表面处产生逆流前的状态。

在边界层里速度分布保持相似，而把速度当作一个变数的函数用解常微分方程的方法来决定，除去这里所說的 $u_1=cx^m$ 的情形以外，$u_1=c/x$ 及 $u_1=c\exp(bx)$的情形也都可以这样决定。

**3) $u_1=c_1x+c_3x^3+c_5x^5+\cdots$的情形** 将对称物体放置在平行的均匀流里 (图 9.5)，自物体前端 (駐点) 沿表面量取 $x$，则边界层外侧的速度一般可表成这种形状。$c_1$, $c_3$, $c_5$, $\cdots$ 是和物体形状有关的常数。在此情形，(8.7)的右边第一項变成

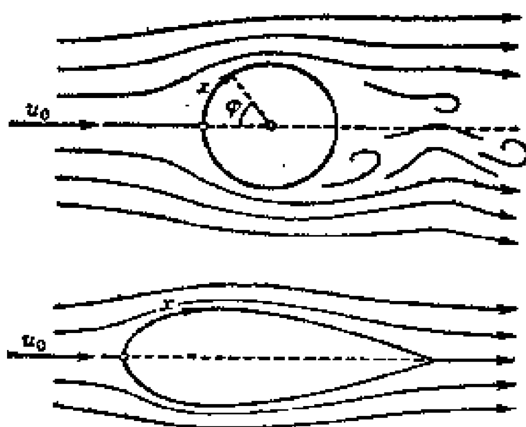


图 9.5

$$u_1(du_1/dx)=c_1^2x+4c_1c_3x^3+$$
$$+(6c_1c_5+3c_3^2)x^5+\cdots,$$

若用

---

❶ 压力梯度的这种影响，由在 (8.5) 內設 $y=0$ 而得的关系式 $\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=0}=\frac{dp}{dx}$ 可以推出。

$$\eta=y\sqrt{\frac{c_1}{\nu}} \tag{9.21}$$

代替 $y$，且假定流函数的形状是

$$\psi=\sqrt{\frac{\nu}{c_1}}[c_1xf_1(\eta)+4c_3x^3f_3(\eta)+6c_5x^5f_5(\eta)+\cdots]. \tag{9.22}$$

为了使 $\eta$ 的未定函数与系数 $c_1$, $c_3$, … 无关，将 $f_5$ 以上的函数分解，設它們的形状如

$$\left.\begin{aligned}&f_5=g_5+\frac{c_3^2}{c_1c_5}h_5,\\&f_7=g_7+\frac{c_3c_5}{c_1c_7}h_7+\frac{c_3^3}{c_1^2c_7}k_7,\ \cdots\end{aligned}\right\} \tag{9.23}$$

就行了。将此代入(8.9)，比較对应系数，得到常微分方程組

$$\left.\begin{aligned}&f_1'''+f_1f_1''-f_1'^2+1=0,\\&f_3'''+f_1f_3''-4f_1'f_3'+3f_1''f_3+1=0,\\&g_5'''+f_1g_5''-6f_1'g_5'+5f_1''g_5+1=0,\\&h_5'''+f_1h_5''-6f_1'h_5'+5f_1''h_5+\frac{1}{2}=8(f_3'^2-f_3f_3''),\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \tag{9.24}$$

(撇号表示对于 $\eta$ 的导数)。其边界条件是

$$\left.\begin{aligned}&\eta=0:\ f_1=f_1'=0,\ f_3=f_3'=0,\ g_5=g_5'=0,\ h_5=h_5'=0,\ \cdots\\&\eta=\infty:\ f_1'=1,\ f_3'=\frac{1}{4},\ \ g_5'=\frac{1}{6},\ h_5'=0,\ \cdots.\end{aligned}\right\} \tag{9.25}$$

只有决定 $f_1$ 的方程是非綫性的，其他都是系数里含有 $f_1$ 的綫性方程。考虑到 $\eta$ 和 (9.15) 里 $\zeta$ 的二倍相当时就可知 $f_1$ 和 (9.17) 里对应着 $m=1$ 的 $f$ 相当。这些函数是 Hiemenz(1911)，Howarth (1935)，Ulrich(1949)用数値积分法求出的，并且一直計算到 $f_9$。利用这些結果可知，若 $\psi$ 取到第五項，則 $u_1$ 可取到第三項的 $c_5x^5$。

作为一个应用，考虑将半徑 $a$ 的圓柱放置在速度为 $u_0$ 的均匀流里的情形。在圓柱周圍无旋运动的速度分布为

$$u_1 = 2u_0 \sin(x/a) = 2u_0 \sin\varphi. \qquad (9.26)$$

于是級数展开的系数是

$$c_1 = \frac{2u_0}{a}, \quad c_3 = -\frac{2}{3!}\frac{u_0}{a^3}, \quad c_5 = \frac{2}{5!}\frac{u_0}{a^5}, \cdots,$$

速度分量变为

$$u = 2u_0\left[\frac{x}{a}f_1' - \frac{4}{3!}\left(\frac{x}{a}\right)^3 f_3' + \frac{6}{5!}\left(\frac{x}{a}\right)^5 f_5' - \cdots\right],$$

取到 $f_9'$ 作計算时，得速度分布如图 9.6，但当 $\varphi$ 超出 90° 时則在表面附近产生屈曲点，对于 $y=0$，$\partial u/\partial y$ 显著地减少。在 $\varphi<90°$ 处有加速流，在 $\varphi>90°$ 处有减速流，在速度分布上出现和 § 9, 2) 所說的情形同样的傾向❶。在 $y=0$ 的 $\partial u/\partial y$ 减少这一事实，說明表面摩擦随着向下流而减少，到某一处时便完全消失，再往下流去时，接近表面的流体形成逆流。換言之，边界层在表面摩擦为零的点好似从表面分离开，所以我們說边界层在这样的点处分离开了。在这个例子里分离点是 $\varphi=110°$。在分离点的下流，边界层的厚度很小的假定已不能成立，所以再进行討論是无意义的。

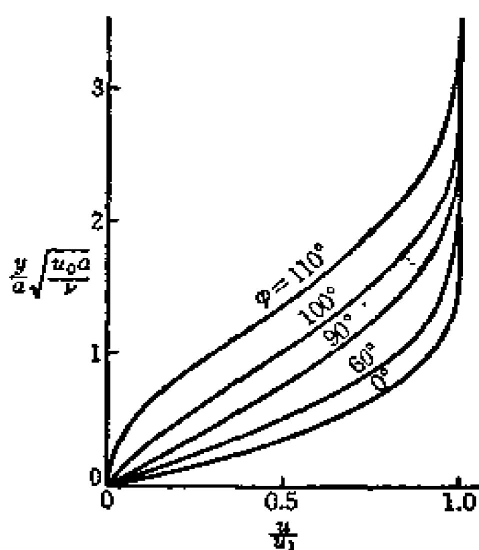



图 9.6

即使是这样，但就实际圓柱观察到的分离点是 $\varphi=80°$ 的附近，和計算結果不一致。其理由不是計算錯誤，而是作为計算的基础的速度分布 (9.26) 是不能实現的。也就是說，象現在这个問題，

❶ 比較图 9.6 和图 9.4，在图 9.6 里各个曲綫表示一个流的种种断面的速度分布，在图 9.4 里一个曲綫表示对应于特定的 $\beta$ 値的流的种种断面的速度分布，这一点必須注意。

当边界层的分离发生在离后端很上流的情形，外侧流受到它的影响将发生显著的变化，所以利用不考虑分离的无旋运动的速度分布是不妥当的。但在边界层的計算里，是将外側流看作已知的而进行的，所以想确定由分离而发生变化的外側流是不可能的。在不发生分离，或即使发生分离也几乎不影响外側流的情形，可以采用无旋运动的速度分布作为速度分布，若更有要求精密度的必要时，可将边界层由于排除厚度而产生的影响加以修正后再使用(参照§11)，但对于有分离而外側流发生显著变化的情形，則只有采用实驗結果作为它的速度分布，別无其他方法。在現在的問題里，若采用速度分布的实驗値，例如

$$u_1/u_0=1.814(x/a)-0.270(x/a)^3-0.0471(x/a)^5,$$

則由計算和由观察可以給出差不多一致的分离点。

在椭圓柱或翼断面那样薄物体的情形，分离发生在离后端很近的地方，所以对于外側流允許采用无旋运动的計算値。只是速度分布 $u_1$ 的形状，在离开駐点的距离很小地方急剧增加，而以后的变化逐漸緩和下来的情形是很常見的。在这种情况，若速度分布用 $x$ 的級数来表示，非取相当多的項不可。仅在已經計算出的函数 $f_1, f_3, \cdots$ 的范圍内，是算不出分离点来的。在这样的情形，就有必要利用§10所說的近似解法。

**4) $u_1=u_0-bx^n$ 的情形** $x\geqslant 0$；$u_0$，$b$ 和 $n$ 都是正的常数，減速流。此时也不可能象§9，2) 那样，将解表成封閉的形状。在此設

$$\sigma=\frac{8bx^n}{u_0}, \quad \zeta=\frac{y}{2}\sqrt{\frac{u_0}{\nu x}}, \tag{9.27}$$

将流函数展开成 $\sigma$ 的級数，且設

$$\psi=\sqrt{\nu x u_0}\,[f_0(\zeta)-\sigma f_1(\zeta)+\sigma^2 f_2(\zeta)-\cdots], \tag{9.28}$$

而代入(8.9)，比較两边的 $\sigma$ 的冪的系数，就得到決定 $f_0, f_1, f_2, \cdots$

的微分方程：

$$
\left.\begin{aligned}
&f_0''' + f_0 f_0'' = 0,\\
&f_1''' + f_0 f_1'' - 2n f_0' f_1' + (2n+1) f_0'' f_1 = -n,\\
&f_2''' + f_0' f_2'' - 4n f_0' f_2 + (4n+1) f_0'' f_2\\
&\qquad = -\frac{n}{8} + 2n f_1'^2 - (2n+1) f_1 f_1'',\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{9.29}
$$

（撇号表示对于 $\zeta$ 的导数）。边界条件是

$$
\left.\begin{aligned}
&\zeta = 0:\quad f_r = 0,\ f_r' = 0 \quad (r = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots);\\
&\zeta = \infty:\ f_0' = 2,\ f_1' = \frac{1}{4},\ f_2' = f_3' = \cdots = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{9.30}
$$

$f_0$ 是和满足(9.4)的 $f$ 完全一样的函数，$f_1$，$f_2$，$\cdots$ 等是将系数含有 $f_0$ 的綫性方程組解开而得到的。在 $n=1$ 的情形由 Howarth (1938)，在 $n=2,\ 4,\ 8$ 的情形由谷 (1949) 将最初的几个方程作了数值积分。但(9.28)的級数收斂得比較迟緩，仅用最初的几个 $f_r$ 不能作出对于 $\sigma$ 的較大值（比方說 $n=1$ 时当 $\sigma=0.7$ 以上）的計算。为了避免求更多的 $f_r$，Howarth 提出了一个方法，利用将 $r=5$ 以上的 $f_r$ 近似地表示为 $K_r\zeta\exp(-a\zeta^s)$ 的形狀（$s$ 及 $a$ 都是与 $r$ 无关的常数），将(9.28)括号里的級数截断到有限个項，再添上校正項 $G(\sigma)\zeta\cdot\exp(-a\zeta^s)$，而假定 $\psi$ 是可以这样近似的。将这个形状代入到将(8.5)对 $y$ 作积分而得的关系式(10.1)里，再解由此結果导出的微分方程，就可决定未知函数 $G(\sigma)$。

用这个方法算出的結果，至少在 $n=1$ 的情形和 Hartree (1939)直接采用数值积分求得的結果差不多完全一致。

将这样得到的結果綜合起来，表示如图9.7。在此图里选取 $\sigma$ 作参数，纵坐标和横坐标各采用无因次量：

$$
P = \frac{2\theta}{u_1}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0},\quad \lambda = \frac{\theta^2}{\nu}\ \frac{du_1}{dx}.
$$

$\theta$ 是(10.3)所定义的长度，$P$ 及 $\lambda$ 是利用 $\theta$ 作成的无因次的表面摩擦及速度梯度。由此图可知，随着 $\sigma$ 的增加而 $P$ 却减少，最后达到 $P=0$。也就是說現在这个問題也和 §9, 3)同样，向下流前进时表面摩擦减少，到某一地点它变为零，在这个点边界层自物体表面开始分离。

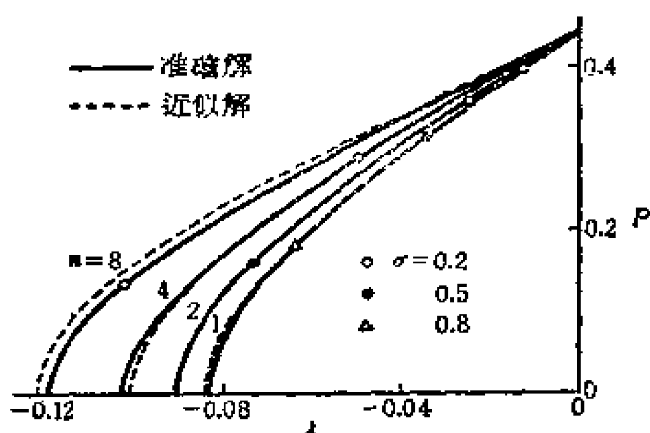



图 9.7

将解按照(9.28)展开成适当参数的級数，再用解常微分方程的方法以决定其系数的可能性，曾由辻(1949)試作过一般的研究。按照他的結果，除現在所說的情形以外，还可用同样方法处理 $u_1=x^m\exp(bx^n)$ 的情形。

## §10 边界层方程的近似解法

象前节所討論的仅限于 $u_1$ 給定为 $x$ 的簡单函数的情形，才可不用近似解法而求出边界层方程(8.7)的解。在一般情形，$u_1$ 是 $x$ 的复杂函数，特别在用数值对应給出 $u_1$ 的情形就非求助于近似解法不可。普通使用的方法是用将(8.5)对 $y$ 作积分而得到的关系来代替(8.5)，而求使該关系得到满足的近似解，也就是求使(8.5)在 $y$ 方向平均地得到满足的近似解。

現在考虑边界层为有限厚度的情形❶，設厚度为 $\delta$，将(8.5)对 $y$ 自 0 到 $\delta$ 作积分。利用(8.1)，考虑到在 $y=\delta$ 时有 $\partial u/\partial y=0$，就得到

❶ 因为明确决定厚度 $\delta$ 有困难，所以使 $u$ 漸近于 $u_1$。如 §9, 1) 最后所設，取 $\delta=3\delta^*$ 也可以。用其他定义也成，在后面結果里，例如(10.2)，(10.3)，(10.5)，(10.6)使 $u$ 等于 $u_1$ 时被积函数为 0。所以 $\delta$ 的定义不同也沒有重要影响。

$$\int_0^\delta\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy=\int_0^\delta u\frac{\partial u}{\partial x}dy+[uv]_0^\delta-\int_0^\delta u\frac{\partial v}{\partial y}dy$$

$$=\int_0^\delta u\frac{\partial u}{\partial x}dy-u_1\int_0^\delta\frac{\partial u}{\partial x}dy+\int_0^\delta u\frac{\partial u}{\partial x}dy$$

$$=\frac{d}{dx}\int_0^\delta u^2dy-u_1\frac{d}{dx}\int_0^\delta u\,dy,$$

$$\int_0^\delta\left(-\frac{dp}{dx}+\mu\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)dy=-\frac{dp}{dx}\delta-\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0};$$

于是

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta\rho u^2dy-u_1\frac{d}{dx}\int_0^\delta\rho udy=-\frac{dp}{dx}\delta-\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}. \quad (10.1)$$

設边界层内有两个在 $x$ 方向相距单位长的断面 $AB$ 及 $CD$，将 $AC$ 看作物体表面的一部（如图 10.1），则(10.1)的左边表示单位时間内自 $ACDB$ 部分流出的 $x$ 方向的动量，右边表示作用在这部分上的 $x$ 方向的力，它由压力 $p$ 及表面摩擦力 $\mu(\partial u/\partial y)_{y=0}$ 所产生。在此意义下，我們将 (10.1) 叫作“边界层的动量方程”(Von Kármán, 1921)。又引进由下列二式确定的 $\delta^*$ 及 $\theta$：

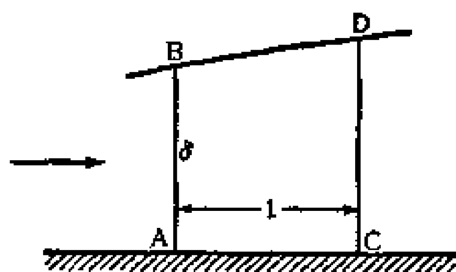


图 10.1

$$u_1\delta^*=\int_0^\delta(u_1-u)dy, \quad (10.2)$$

$$u_1^2\theta=\int_0^\delta(u_1-u)u\,dy, \quad (10.3)$$

此处 $\delta^*$ 是(9.13)里所用的排除厚度，$\theta$ 是和边界层里所失掉的动量成比例的量，叫作“动量厚度”。利用这些量，(10.1)就变成如下形状：

$$\frac{d}{dx}(\rho u_1^2\theta)=\frac{dp}{dx}\delta^*+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}, \quad (10.4)$$

这个方程明确地指出了 $\delta^*$ 和 $\theta$ 的物理意义。

其次，将(8.5)两边乘以 $u$，同样对 $y$ 作积分，用

$$u_1^3\theta^* = \int_0^\delta (u_1^2-u^2)u\,dy \tag{10.5}$$

定义新的厚度 $\theta^*$，则得

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\rho u_1^3\theta^*\right)=\int_0^\delta \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy. \tag{10.6}$$

左边表示单位时間內在 $ACDB$ 部分所产生的动能的减少，右边表示由于粘性而失掉的能量的率，这个关系叫作“边界层的能量方程”。$\theta^*$ 叫作“能量厚度”(Wieghardt, 1948)。

要利用在 $y$ 方向积分的关系，作进一步計算时，有必要假定在边界层里的速度 $u$ 在 $y$ 方向的分布。对此，簡单地假定 $y$ 的四次多項式

$$\frac{u}{u_1}=a_0+a\frac{y}{\delta}+b\frac{y^2}{\delta^2}+c\frac{y^3}{\delta^3}+d\frac{y^4}{\delta^4}, \tag{10.7}$$

系数 $a_0$, $a$, $b$, $c$, $d$ (每个都是 $x$ 的函数)中除 $a$ 外，其余四个都由边界条件

$$\left.\begin{aligned} &y=0:\quad u=0,\\ &y=\delta:\quad u=u_1,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \end{aligned}\right\} \tag{10.8}$$

决定为 $x$ 的函数时，(10.7) 可写成如下形状

$$\frac{u}{u_1}=1-\left(1-\frac{y}{\delta}\right)^3\left[1+(3-a)\frac{y}{\delta}\right]. \tag{10.9}$$

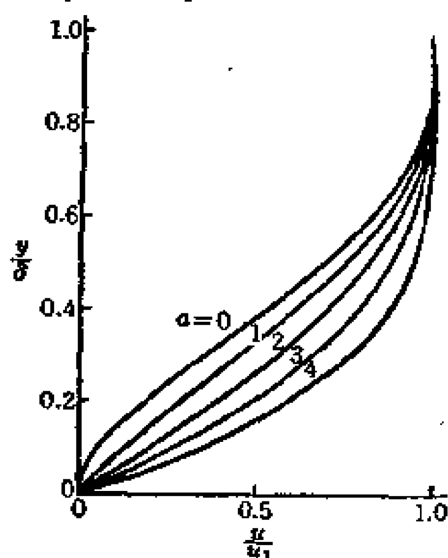


图 10.2

它表示以 $a$ 为参数的曲綫族(图 10.2)，$a$ 是和表面摩擦成比例的无因次量。于是只要用速度分布所决定的无因次量，就可将(10.4) 及 (10.6)各表示为如下形状：

$$\frac{u_1}{\nu}\frac{d\theta^2}{dx}+2(2+H)\frac{\theta^2}{\nu}\frac{du_1}{dx}=P, \tag{10.10}$$

$$\frac{u_1}{\nu}\frac{dG^2\theta^2}{dx}+6\frac{G^2\theta^2}{\nu}\frac{du_1}{dx}=Q, \tag{10.11}$$

其中 $H$, $G$, $P$ 及 $Q$ 都仅为 $a$ 的函数,可各給出如下:

$$H\equiv\frac{\delta^*}{\theta}=\frac{63(8-a)}{144+12a-5a^2}, \tag{10.12}$$

$$G\equiv\frac{\theta^*}{\theta}=\frac{3}{143}\frac{10512+876a-253a^2-21a^3}{144+12a-5a^2}, \tag{10.13}$$

$$P\equiv\frac{2\theta}{u_1}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}=\frac{a}{630}(144+12a-5a^2), \tag{10.14}$$

$$Q\equiv\frac{4\theta^*}{u_1^2}\int_0^\delta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2dy=\frac{1}{525525}(48-4a+3a^2)(10512+876a-253a^2-21a^3). \tag{10.15}$$

对于 $a$ 所代表的值,这些量的数值可列成表 10 1。

表 10.1

| $a$ | $G$ | $\ln G$ | $H$ | $P$ | $Q$ | $P-Q/G^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.531 | 0.4262 | 3.500 | 0 | 0.960 | −0.4094 |
| 0.25 | 1.532 | 0.4268 | 3.328 | 0.0582 | 0.962 | −0.3516 |
| 0.50 | 1.535 | 0.4285 | 3.176 | 0.1181 | 0.968 | −0.2928 |
| 0.75 | 1.539 | 0.4311 | 3.041 | 0.1788 | 0.979 | −0.2345 |
| 1.00 | 1.544 | 0.4345 | 2.921 | 0.2397 | 0.994 | −0.1772 |
| 1.25 | 1.550 | 0.4383 | 2.813 | 0.3000 | 1.014 | −0.1219 |
| 1.50 | 1.557 | 0.4425 | 2.716 | 0.3589 | 1.038 | −0.0693 |
| 1.75 | 1.564 | 0.4471 | 2.630 | 0.4158 | 1.066 | −0.0199 |
| 2.00 | 1.571 | 0.4518 | 2.554 | 0.4698 | 1.097 | 0.0255 |
| 2.25 | 1.579 | 0.4566 | 2.486 | 0.5203 | 1.130 | 0.0667 |
| 2.50 | 1.586 | 0.4613 | 2.427 | 0.5665 | 1.165 | 0.1033 |
| 3.00 | 1.600 | 0.4700 | 2.333 | 0.6429 | 1.234 | 0.1608 |
| 3.50 | 1.611 | 0.4767 | 2.273 | 0.6931 | 1.290 | 0.1961 |
| 4.00 | 1.615 | 0.4796 | 2.250 | 0.7111 | 1.313 | 0.2080 |

Pohlhausen (1921) 在(8.7)内置 $y=0$ 而得到条件

$$y=0:\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{u_1}{\nu}\frac{du_1}{dx},\tag{10.16}$$

由此决定了参数 $a$ 的值。利用 $\theta$ 及 $\nu$ 的公式

$$\lambda=\frac{\theta^2}{\nu}\frac{du_1}{dx},\tag{10.17}$$

导入无因次的速度梯度 $\lambda$❶，则 $a$ 可用 $\lambda$ 表示如下：

$$(a-2)(144+12a-5a^2)^2=264600\lambda.\tag{10.18}$$

作为这个式子的結果，速度分布可用 $\lambda$ 为参数而表示出来，但 $\lambda$ 在加速流（压力下降）时是正的，减速流（压力上升）时是負的，沿着无速度梯度的平板的流是0. 和 §9, 3) 所說的一样，边界层从表面分离的点是 $a=0$，由(10.18)可知这是和 $\lambda=-0.1567$ 相对应的。

$H$ 及 $P$ 是 $a$ 的函数，所以由(10.18)可知它們是 $\lambda$ 的函数，于是(10.10)可写成如下形状：

$$u_1\frac{d}{dx}\left(\frac{\theta^2}{\nu}\right)=P-2(2+H)\lambda,\tag{10.19}$$

此时右侧仅为 $\lambda$ 的函数。$u_1$ 是已給的 $x$ 的函数，将此式作数值积分则可决定 $\theta$ 为 $x$ 的函数。更用 (10.17) 計算 $\lambda$，就可决定和 $\lambda=-0.1567$ 相当的分离点。考虑鈍头的物体，积分从駐点 $x=0$ 开始，在該处有 $u_1=0$，所以为了使 $d\theta^2/dx$ 不为 $\infty$，就非采取使(10.19)右側为0的值 $\lambda=0.0770$ 作为 $\lambda$ 的出发值。

这个方法就是很有名的“Pohlhausen 方法”。应用于减速流时效果并不很好。例如在这个方法里，不管怎样情形在 $\lambda=-0.1567$ 处都应該发生分离，但如 §9, 4) 的准确解的情形，对于 $u_1=u_0-bx^n$ ($n=1\sim8$)的分离点却由 $\lambda=-0.084\sim0.119$ 給出（图9.7）。也就是和精密計算比較时，Pohlhausen 解法不仅較迟地給出分离点，而且还不能給出如下事实的說明，即为何在分离点的 $\lambda$ 的值不

❶ Pohlhausen 用 $\Lambda=(\delta^2/\nu)(du_1/dx)$ 代替 $\lambda$. 若用 $\Lambda$ 时则和 (10.18) 相当的关系变为 $a-2=\Lambda/6$.

能一定，而随着外侧的速度分布的影响有不同。第一个缺点，利用比(10.7)次数更高的多项式时在某种程度上虽可以避免，而第二个缺点却是这个解法所固有的，其原因在于条件(10.16)将 λ 和 $a$ 唯一地結合起来，而又采用 λ 作为速度分布的参数所引起的。

因此，可以考虑放弃条件(10.16)而采用自(10.10)及(10.11)消去 $d\theta^2/dx$ 而得到的关系

$$\lambda(H-1)=\frac{1}{2}\left(P-\frac{Q}{G^2}\right)+\lambda\frac{d\ln G}{d\ln u_1} \qquad (10.20)$$

(谷, 1954)。$H$, $G$, $P$ 及 $Q$ 都是 $a$ 的函数，所以这个式子可以代替(10.18)表示 $a$ 与 λ 之間的联系。特别这个式子里包含着 $u_1$，所以 $a$ 和 λ 的关系不能象(10.18)那样唯一地决定出来。

在(10.11)里，$G$ 及 $Q$ 随着 $a$ 的变化是很小的(参照表10.1)，所以将它們用一定的值 $G_m$ 及 $Q_m$ 来代替也无多大关系。这样(10.11)可以簡单地积分出来，对于 $\theta^2/\nu$ 的第1阶近似为

$$\frac{\theta^2}{\nu}=\frac{Q_m}{G_m^2}u_1^{-6}\int_0^x u_1^5dx \qquad (10.21)$$

($x$ 自駐点开始测量)。采用后边所說沿着平板的流的 $G$ 及 $Q$ 作为 $G_m$ 及 $Q_m$，则有 $Q_m/G_m^2=1.079/1.567^2=0.439$，若已知 $u_1$ 是 $x$ 的函数，则由(10.21)可以簡单地計算出 $\frac{\theta^2}{\nu}$ 来。将它代入(10.17)就可将 λ 决定为 $x$ 的函数，再代入(10.20)就将 $a$ 决定为 $x$ 的函数了。

将 $a$ 表示为 $x$ 的函数后，也就可将 $Q$ 表为 λ 的函数，将此函数用直綫[1] $Q=Q_m+r\lambda$ 来代替，再对(10.11)作积分，就可得到对于 $\theta^2/\nu$ 的第2阶近似

$$\frac{\theta^2}{\nu}=\frac{Q_m}{G^2}u_1^{-(6-r)}\int_0^x u_1^{5-r}dx. \qquad (10.22)$$

[1] 是 $Q=Q_m+rG_m^2\lambda$，而在(10.22)中的 $G$ 应为 $G_m$。——校者注

在許多情形里，$G$ 和 $Q$ 的变化可以互相抵消，由(10.22)所得的結果和由(10.21)所得的結果差不多沒有差别。因此可以說(10.21)能給出相当良好的近似。

对于沿着平板的流 ($u_1$=常数)，$\lambda=0$，$G$=常数；于是由(10.20)得 $P-Q/G^2=0$；滿足这个条件的值由 $a=1.857$ 給出来。对于这个值有 $P=0.439$，$Q=1.079$，$G=1.567$，$H=2.60$。由 § 9, 1) 的准确解所得的值是 $P=0.441$，$Q=1.090$，$G=1.572$，$H=2.59$。其次，在(10.10)及(10.11)里設 $u_1=0$ 时，自其間消去 $du_1/dx$，則得决定駐点的 $a$ 的方程 $Q/3G^2-P/(2+H)=0$。这个方程的左边在 $a=0\sim4$ 間恒为正的，在 $a=4$ 取最小值 $0.0004(Q/3G^2=0.1677,\ P/(2+H)=0.1673)$，所以可以近似地将 $a=4$ 看作对应于駐点的值。这样就有 $P=0.711$，$\lambda=0.084$。但由 § 9, 2) 的准确解($u_1=cx$)所得的值是 $P=0.721$，$\lambda=0.085$。

这样，$a$ 的变域是由 0 (分离点) 到 4 (駐点)，按近似計算的結果，至少对于沿着平板的流和在駐点附近的流来說，在实用上是十分正确的。对于 4 以上的 $a$，在边界层里出現超过 $u_1$ 的速度，所以就不能采用 $u_1$ 作为速度分布了。

討論近似解在整体意义下的精密度，对于 § 9, 4) 所处理的 $u_1=u_0-bx^n$ 的情形，計算出 $\lambda$ 和 $P$ 的对应关系，将它和由准确解得来的关系作比較，其結果可用图 9.7 来表示。我們之所以用 $P$ 来代替 $a$，是因为在准确解里沒有和 $a$ 相当的量，而且 $P/a$ 关于 $a$ 仅有非常小的变化。比較的結果，大体上是可以认为令人滿意的。

## § 11 小 Reynolds 数情形的第 2 阶近似

首先将 N. S. 方程写成无因次的形状。設物体的代表长度是 $l$，离物体十分远处的速度及压力各为 $u_0$ 及 $p_0$，Reynolds 数是 $R=u_0l/\nu$，如(8.4)所示，边界层厚度 $\delta$ 与 $l$ 的比随 $R$ 的增加而和

$\sqrt{R}$成反比地减少。考虑到这个事实,用

$$X=\frac{x}{l},\ Y=\sqrt{R}\frac{y}{l},\ P=\frac{p-p_0}{\rho u_0^2},\ U=\frac{u}{u_0},\ V=\sqrt{R}\frac{v}{u_0} \quad (11.1)$$

定义无因次量,且将它們看作与1同量級。将(11.1)代入(8.1)及(8.2),则得

$$\frac{\partial U}{\partial X}+\frac{\partial V}{\partial Y}=0, \quad (11.2)$$

$$\left.\begin{aligned} U\frac{\partial U}{\partial X}+V\frac{\partial U}{\partial Y}&=-\frac{\partial P}{\partial X}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2},\\ \frac{1}{R}\left(U\frac{\partial V}{\partial X}+V\frac{\partial V}{\partial Y}\right)&=-\frac{\partial P}{\partial Y}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}.\end{aligned}\right\} \quad (11.3)$$

在此若略去$\frac{1}{R}$和$\frac{1}{R^2}$量級的項,再将无因次量回复到原来的量,就得到边界层方程(8.5)。这样推导边界层方程的方法和§8所用方法作比較,虽在物理意义上稍欠明了,但在数学上却比較好看些。

当 Reynolds 数 $R$ 不十分大时,就有必要将边界层方程的解取作第1阶近似,考虑略去的項的影响以进一步改良近似。特别是边界层外側的流綫,由第1阶近似解排除了排除厚度,所以在第1阶近似解的基础上的无旋运动是应該多少有一些变更的。在边界层外側 $v/u$ 的量級只是 $1/\sqrt{R}$的量級。在进一步作近似时,在考虑(11.3)所略去的項之前,非先考虑排除厚度的影响不可。

为了滿足(11.2),用下列方式导入无因次的流函数 $\Psi$:

$$U=\frac{\partial\Psi}{\partial Y},\quad V=-\frac{\partial\Psi}{\partial X}. \quad (11.4)$$

将它代入(11.3),用下标表示导数,則得

$$\left.\begin{aligned} \Psi_Y\Psi_{XY}-\Psi_X\Psi_{YY}&=-P_X+\frac{1}{R}\Psi_{XXY}+\Psi_{YYY},\\ \frac{1}{R}(-\Psi_Y\Psi_{XX}+\Psi_X\Psi_{XY})&=-P_Y-\frac{1}{R^2}\Psi_{XXX}-\frac{1}{R}\Psi_{XYY}.\end{aligned}\right\}(11.5)$$

用上述逐次近似法求这个方程的解，設 $\varepsilon=1/\sqrt{R}$，将边界层方程(8.5)的解取作第 1 阶近似(用上标 0 表示出来)，将 $\Psi$ 及 $P$ 作下列展开:

$$\left.\begin{aligned}\Psi&=\Psi^{(0)}+\varepsilon\Psi^{(1)}+\varepsilon^2\Psi^{(2)}+\cdots,\\ P&=P^{(0)}+\varepsilon P^{(1)}+\varepsilon^2P^{(2)}+\cdots.\end{aligned}\right\}\tag{11.6}$$

将这些代入 (11.5)，比較两边的 $\varepsilon$ 的冪的系数，就可得到关于 $\Psi^{(n)}$, $P^{(n)}$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$的方程。

Kuo (1953) 曾用这个方法求得沿着平板的流的第 2 阶近似解。此时有 $P^{(0)}=0$，比較 $\varepsilon^0$ 的系数得到对于第 1 阶近似解 $\Psi^{(0)}$ 的偏微分方程

$$\Psi_Y^{(0)}\Psi_{XY}^{(0)}-\Psi_X^{(0)}\Psi_{YY}^{(0)}=\Psi_{YYY}^{(0)},\tag{11.7}$$

令其解为 $\Psi^{(0)}=\sqrt{X}f(\zeta)$，$\zeta=Y/2\sqrt{X}$，則积分常微分方程

$$f'''+ff''=0\tag{11.8}$$

即可求得解(撇号表示对 $\zeta$ 的导数)。这个 $f$ 和 (9.4) 給出的 $f$ 相同，满足边界条件(9.5)及(9.6)的解由(9.7)及(9.8)給出。

其次比較 $\varepsilon^1$ 的系数，得到第 2 阶近似所需要的函数 $\Psi^{(1)}$ 的偏微分方程

$$\left.\begin{aligned}&\Psi_Y^{(0)}\Psi_{XY}^{(1)}+\Psi_{XY}^{(0)}\Psi_Y^{(1)}-\Psi_X^{(0)}\Psi_{YY}^{(1)}-\Psi_{YY}^{(0)}\Psi_X^{(1)}=-P_X^{(1)}+\Psi_{YYY}^{(1)},\\ &0=-P_Y^{(1)}.\end{aligned}\right\}\tag{11.9}$$

由第二式可知，即使在第 2 阶近似里压力也仅是 $X$ 的函数[1]。在另一方面，由于第 1 阶近似解的排除厚度，外側的无旋运动的速度分量各变为

$$u_1=u_0+\varepsilon u_1^{(1)},\quad v_1=\varepsilon v_1^{(1)},$$

代入到 Bernoulli 方程 (参照 § 1) $p+\dfrac{1}{2}\rho(u_1^2+v_1^2)=p_0+\dfrac{1}{2}\rho u_0^2$

[1] 也就是說即使在第 2 阶近似里，偏微分方程也和边界层方程具有同样性格。这个事实由于沿着平板的流的情形，可以看得很清楚，压力在 $y$ 方向的变化是 $\varepsilon^2$ 的量級。

里得到❶ $p=p_0-\varepsilon\rho u_0 u_1^{(1)}$，于是得

$$P^{(1)}=-u_1^{(1)}/u_0. \tag{11.10}$$

将(11.10)代入(11.9)，就可决定 $\Psi^{(1)}$。

由于(9.14)，故有

$$v_1=(B/2)\sqrt{\nu u_0/x}=\varepsilon B u_0/2\sqrt{X}\,(B=1.7208).$$

将它看作边界层的流时必須考虑 $\zeta$ 的大值，但若将它看作外侧的无旋流，就必須考虑 $y$ 的小值，现在就将它近似地看作是 $y=0$ 时的流。所以問題归結到求在 $y=0$ 具有已知垂直速度分量的无旋运动的水平速度分量的問題。今設平板占有由 $x=0$ 到 $x=l$ 的范圍(即由 $X=0$ 到 $X=1$)，在 $y=0$(即 $Y=0$)的 $v$ 值在范圍 $0\leqslant X\leqslant 1$ 内是 $\varepsilon B u_0/2\sqrt{X}$，在 $X<0$ 及 $X>1$ 是 0❷. 满足这样条件的无旋运动，当設 $Z=X+iY/\sqrt{R}$ $(i=\sqrt{-1})$时，则❸

$$u-iv=\varepsilon\frac{Bu_0}{2\pi}\int_0^1\frac{dX}{\sqrt{X}\,(Z-X)}=\varepsilon\frac{Bu_0}{2\pi\sqrt{Z}}\left[\ln\frac{1+\sqrt{Z}}{1-\sqrt{Z}}-i\pi\right].$$

所以在 $0\leqslant X\leqslant 1$ 上，$Y=0$ 的 $u$ 值变为

$$\varepsilon u_1^{(1)}=\varepsilon\frac{Bu_0}{2\pi\sqrt{X}}\ln\frac{1+\sqrt{X}}{1-\sqrt{X}},$$

由(11.10)得到 $P^{(1)}$ 的値如下：

$$P^{(1)}=-\frac{B}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{X}}\ln\frac{1+\sqrt{X}}{1-\sqrt{X}}=-\frac{B}{\pi}\left[1+\frac{X}{3}+\frac{X^2}{5}+\cdots\right]. \tag{11.11}$$

用这个 $P^{(1)}$ 来求第2阶近似解，設 $\zeta=Y/2\sqrt{X}$，假定 $\Psi^{(1)}$ 取

❶ 原书誤写为 $p=p_0+\varepsilon\rho u_0 u_1^{(1)}$. ——校者注

❷ $X>1$ 是叫作尾流的部分，为了使边界层流持續下去，$v$ 实际上不为 0，但它的尺寸是十分小的。即使将它略去也不引起誤差，而且 $l$ 变成无限大时，压力变化 $P^{(1)}$ 就消失了。——校者注

❸ 利用复变函数理論中的 Schwarz 公式就可解决这个边值問題，关于 Schwarz 公式可见 Маркушевеч 著《解析函数論教程》(中譯本)。——校者注

如下形状

$$\Psi^{(1)}=\frac{B}{\pi}\sqrt{X}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{X^{m-1}}{2m-1}g_m(\zeta). \tag{11.12}$$

将它及(11.11)代入(11.9)，得到决定 $g_m(m=1, 2, \cdots)$的常微分方程

$$g_m'''+fg_m''-2(m-1)f'g_m'+(2m-1)f''g_m=-8(m-1) \tag{11.13}$$

(撇号表示对于 $\zeta$ 的导数)。边界条件是

$$\left.\begin{aligned}&\zeta=0:\quad g_m=0,\ g_m'=0;\\&\zeta=\infty:\ g_m'=2.\end{aligned}\right\} \tag{11.14}$$

Kuo 参照着(9.29)的解❶，将微分方程(11.13)作近似积分，推定

$$A_1=\frac{B}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{g_m''(0)}{(2m-1)^2} \tag{11.15}$$

的值是 4.10。作用在平板表面的摩擦应力是

$$\begin{aligned}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}&=\rho u_0^2\varepsilon(\Psi_{YY})_{Y=0}\\&=\frac{\rho u_0^2\varepsilon}{4\sqrt{X}}\left[f''(0)+\varepsilon\frac{B}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{g_m''(0)}{2m-1}X^{m-1}\right],\end{aligned} \tag{11.16}$$

将它对 $X$ 自 0 到 1 作积分，再除以 $\frac{1}{2}\rho u_0^2$，就得到无因次的摩阻系数

$$C_f=\varepsilon\left[f''(0)+\varepsilon\frac{B}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{g_m''(0)}{(2m-1)^2}\right]=\frac{A}{\sqrt{B}}+\frac{A_1}{R} \tag{11.17}$$

($A=1.3282$)。第一项 $A/\sqrt{R}$ 是由第 1 阶近似解得来的(参照(9.12))，第二项 $A_1/R$ 是由第 2 阶近似解得到的修正項。修正項只有当 $R$ 在 $10^4$ 以下时才有意义，考虑这一点而得到的結果可表为图 11.1，直到 $R=10$ 的附近，是和实驗結果很好地一致的。

更进到第 3 阶近似时，就应該得到适用于 $R$ 的更小值的摩阻

❶ $g_m$ 和在(9.29)里設 $n=m-1$ 而得的 $8f_1$ 相等。

系数的公式，对此须要予以特别注意。在平板的前沿 $x=0$，$\Psi^{(1)}$ 和 $\Psi^{(0)}$ 显示同程度的奇异性，例如表面摩擦应力(11.16)的两项，每项都和 $1/\sqrt{x}$ 成比例地变为无穷大。若照原样机械地进行近似，则这样的奇异性在第3阶近似里将更加强，由于摩擦应力和 $1/x$ 成比例地变成无穷大，所以在求摩阻时的积分已不能收敛。因此，至少在前沿附近，再作进一步的近似只会将结果改得更坏。为了避免这一点，Kuo 及 Lighthill (1949) 应用坐标变换的方法，亦即用下列公式

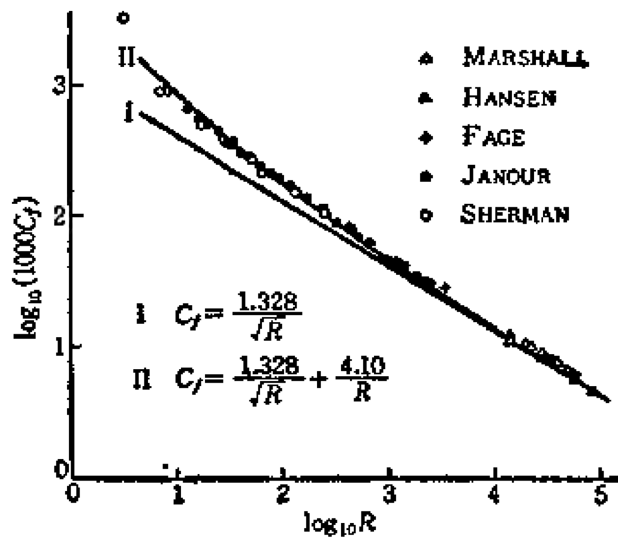



图 11.1

$$\left.\begin{aligned}X&=\xi+\varepsilon X^{(1)}+\varepsilon^2X^{(2)}+\cdots,\\Y&=\eta,\end{aligned}\right\}\tag{11.18}$$

以 $\xi$、$\eta$ 代替 $X$ 及 $Y$，且将 $X^{(n)}$ 及(11.6)的 $\Psi^{(n)}$ 及 $P^{(n)}$ 都看作 $\xi$ 及 $\eta$ 的函数，这样来决定未知函数 $X^{(n)}$ 使高阶近似里的奇异性限于和第1阶近似的奇异性是同量级的。在现在的情形，直到第2阶近似是无問題的，所以使 $X^{(1)}=0$ 而抑制第3阶近似的奇异性以决定 $X^{(2)}$ 就行了。于是有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial X}&=\frac{1}{1+\varepsilon^2X_\xi^{(2)}+\cdots}\frac{\partial}{\partial\xi},\\\frac{\partial}{\partial Y}&=\frac{\partial}{\partial\eta}-\frac{\varepsilon^2X_\eta^{(2)}+\cdots}{1+\varepsilon^2X_\xi^{(2)}+\cdots}\frac{\partial}{\partial\xi},\end{aligned}\right\}\tag{11.19}$$

所以将 $\Psi^{(0)}$ 及 $\Psi^{(1)}$ 决定成 $\xi$ 及 $\eta$ 的函数的方程，和(11.7)及(11.9)是一样的，对于 $\Psi^{(2)}$ 及 $P^{(2)}$ 得到

$$
\begin{aligned}
&\Psi_{\eta}^{(0)}\Psi_{\xi\eta}^{(2)}+\Psi_{\xi\eta}^{(0)}\Psi_{\eta}^{(2)}-\Psi_{\xi}^{(0)}\Psi_{\eta\eta}^{(2)}-\Psi_{\eta\eta}^{(0)}\Psi_{\xi}^{(2)}-\Psi_{\eta\eta\eta}^{(2)}\\
&\quad=[\Psi_{\xi}^{(1)}\Psi_{\eta\eta}^{(1)}-\Psi_{\eta}^{(1)}\Psi_{\xi\eta}^{(1)}]+[-P_{\xi}^{(2)}+\Psi_{\xi\xi\eta}^{(0)}+\Psi_{\eta\eta\eta}^{(0)}X_{\xi}^{(2)}\\
&\qquad+(P_{\eta}^{(2)}-2\Psi_{\xi\eta\eta}^{(0)})X_{\eta}^{(2)}+\Psi_{\xi}^{(0)}\Psi_{\eta}^{(0)}X_{\xi\eta}^{(2)}\\
&\qquad-(\Psi_{\xi}^{(0)2}+3\Psi_{\xi\eta}^{(0)})X_{\eta\eta}^{(2)}-\Psi_{\xi}^{(0)}X_{\eta\eta\eta}^{(2)}],
\end{aligned}
\tag{11.20}
$$

$$
P_{\eta}^{(2)}+\Psi_{\xi}^{(0)}\Psi_{\xi\eta}^{(0)}-\Psi_{\eta}^{(0)}\Psi_{\xi\xi}^{(0)}+\Psi_{\xi\eta\eta}^{(0)}=0. \tag{11.21}
$$

在此和以前同样，設 $\zeta=\eta/2\sqrt{\xi}$，則可知 (11.20) 右側的第一个括号在 $\xi=0$ 的奇异性是 $1/\xi$，第二个括号的奇异性是 $1/\xi^2$。必須在使第二括号的奇异性不发生危害的情况下决定 $X^{(2)}$ 才成。在如此决定它以前，先将(11.21)作积分，得

$$
\left.
\begin{aligned}
&P^{(2)}=P_2(\xi)+\tilde{\omega}^{(2)}(\xi,\ \eta),\\
&\tilde{\omega}^{(2)}(\xi,\ \eta)=\int(\Psi_{\eta}^{(0)}\Psi_{\xi\xi}^{(0)}-\Psi_{\xi}^{(0)}\Psi_{\xi\eta}^{(0)}-\Psi_{\xi\eta\eta}^{(0)})\,d\eta,
\end{aligned}
\right\}
\tag{11.22}
$$

但 $P_2(\xi)$ 和 $P^{(1)}$ 同样是在考虑到第 2 阶近似对于无旋运动所加上的修正后决定的。 由于这項并不产生有危害的奇异性，所以决定 $X^{(2)}$ 时除去这項是可以的，于是在 (11.20) 右侧的第二个括号里将 $P^{(2)}$ 代以 $\tilde{\omega}^{(2)}$ 而后令其为 0 就可以了。$X^{(2)}$ 仅是 $\zeta$ 的函数，令其为 $h(\zeta)$，則得

$$
\begin{aligned}
&(f-\zeta f')h'''+(f^2-\zeta ff'-3\zeta f'')h''\\
&\qquad+[2f'(f-\zeta f')-(3f''+\zeta f''')]h'\\
&\qquad=12\zeta f''+2\zeta^2f'''+2\zeta ff'-4f^2+2\zeta^2f'^2
\end{aligned}
\tag{11.23}
$$

(撇号表示对于 $\zeta$ 的导数)。若决定 $h$ 使 $h(0)=0$，則可知由这个方程所决定的 $h$，对于小 $\zeta$ 值有 $h=-\zeta^2$，对于大 $\zeta$ 值有

$$
h=-(\zeta-B/4)^2.
$$

这里值得注意的是，第 1、第 2 阶近似解是边界层方程或和它相当的方程，也就是抛物型偏微分方程的解，利用坐标变换的第 3 阶近似解是 N. S. 方程，也就是椭圓型偏微分方程的解。 提高近似的程度时微分方程的类型也跟着发生变化。若想到这个事实，

则卽使仅用第1阶近似解，而再利用坐标变换加以改进时，是不是也可使 N. S. 方程特性再行出現？由于以下所述，这在某种程度上是可能的。

对于和正 $\xi$ 軸一致的平板的第1阶近似解，当然只限于 $\xi$ 及 $\eta$ 都是正的第一象限里。然而在 (11.18) 或者在我們現在的問題里，若施行坐标变换

$$X=\xi+\varepsilon^2 h(\zeta),\quad Y=\eta, \tag{11.24}$$

$(\xi,\eta)$ 平面的第一象限映照在 $(X,Y)$ 平面的上半平面，特别是 $\zeta=$常数的拋物綫（在第1阶近似解內速度分量 $u$ 为常数的曲綫），其頂点在 $(\xi,\eta)$ 平面上都是在原点，但在 $(X,Y)$ 平面上却在負的 $X$ 軸上移动（图 11.2）。移动量是 $\varepsilon^2$ 量級的，于是作为长度看来它是 $\nu/u_0$ 的量級。为了使第1阶近似解限制在 $(\xi,\eta)$ 平面的第一象限內，就得到那种必須使速度分量 $u$ 在負 $\xi$ 軸及正 $\eta$ 軸上都取一定值 $u_0$ 的非現实的情况发生，但在施行了坐标变换的 $(X,Y)$ 平面上，如图 11.2 那样，卽使 $u$ 在負的 $X$ 軸上，或者正的 $Y$ 軸上也是变化的。特别为了知道接近平板前沿 $X=0$, $Y=0$ 附近的状态，在 (11.24) 里設 $h=-\zeta^2$ 而得

$$2\xi=\sqrt{X^2+\varepsilon^2Y^2}+X,\quad 2\varepsilon^2\zeta^2=\sqrt{X^2+\varepsilon^2Y^2}-X,$$

更将 $\Psi^{(0)}=\sqrt{\xi}f(\zeta)$ 的 $f$ 用 (9.7) 的第一項 $\frac{1}{2}A\zeta^2$ 作近似时，就得到

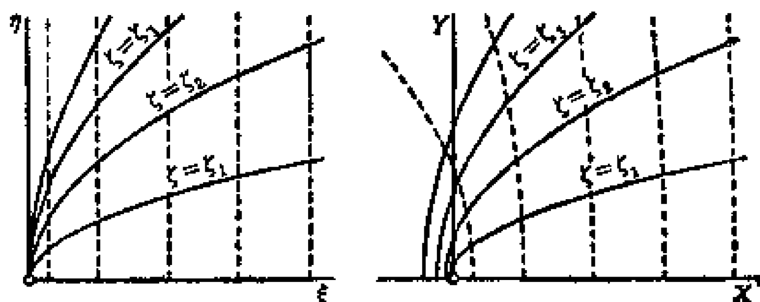



图 11.2

$$\psi^{(0)}=\sqrt{\nu u_0 l}\ \Psi^{(0)}=\frac{A}{4\sqrt{2}}\sqrt{\frac{u_0}{\nu}}\,u_0 y\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}.$$

設 $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$, 則它等于 $(iA/8)\sqrt{(u_0/\nu)}\cdot u_0 z(\sqrt{\bar{z}}-$ $-\sqrt{z})$ 的虚部。也就是說，在前沿附近流函数变成重調和函数，而显示出 Stokes 近似的性格（参照 §5，特别是 (5.17)）。再将 $\psi^{(0)}$ 微分而得的速度分量 $u$ 及 $v$ 也显然变成同量級的。其次，在 $\zeta$ 大的情形，将 $h$ 用 $-\zeta^2$ 来近似，且利用(11.19)，則得

$$u=u_0\frac{\partial\Psi^{(0)}}{\partial Y}=u_0-\varepsilon B\frac{u_0}{2}\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$v=-\varepsilon u_0\frac{\partial\Psi^{(0)}}{\partial X}=\varepsilon B\frac{u_0\sqrt{l}}{2\sqrt{2}}\frac{\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

由此可知 $\psi^{(0)}=\sqrt{\nu u_0 l}\,\Psi^{(0)}$ 等于 $u_0(z-i\varepsilon B\sqrt{lz})$ 的虚部。这意味着离开平板十分远处的流，可以用非粘性流体的无旋运动作近似（参照 §1，特别是(1.30)）。这样的結論表明，用坐标变换大大地改进了第1阶近似解，显示出接近准确地解出 N.S. 方程的結果。特别在这里仅有 $X^{(2)}$ 的变换，对于摩阻并沒有什么影响，其結果和已得的(11.17)沒有任何变化。为了进一步改良摩阻公式，就有必要实际計算第3阶近似解 $\Psi^{(2)}$ 及坐标变换 $X^{(3)}$。

## §12 三維边界层

前面四节里所說的仅限于二維流的情形，本节将叙述非二維边界层的两个簡单例子。

**1）使軸对称物体的軸平行地放置在流里的情形** 如图 12.1，沿着軸对称物体的子午断面自駐点开始测量 $\bar{x}$，沿垂直于表面的方向测量 $\bar{y}$，命各方向的速度分量为 $\bar{u}$ 及

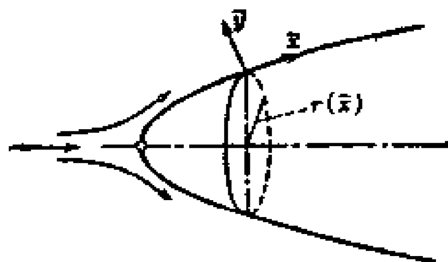


图 12.1

$\bar{v}$,边界层外侧的 $\bar{u}$ 的值是 $\bar{u}_1$。又命垂直于軸的断面半徑为 $r(\bar{x})$,則連續方程(2.1)变为

$$\frac{\partial(r\bar{u})}{\partial\bar{x}}+\frac{\partial(r\bar{v})}{\partial\bar{y}}=0. \tag{12.1}$$

其次将运动方程 (2.2) 也用曲綫坐标改写,因此,与 §8 同样的討論❶,在边界层里作簡化后得到

$$\bar{u}\,\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+\bar{v}\,\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}=\bar{u}_1\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial\bar{x}}+\nu\,\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{y}^2}. \tag{12.2}$$

将这些方程和二維流的方程(8.1) 及 (8.7)作比較,看出运动方程的形状是相同的,仅連續方程不同。但若設軸对称流和二維流間有关系

$$\left.\begin{aligned}&x=\frac{1}{l^2}\int_0^{\bar{x}}r^2d\bar{x},\quad y=\frac{r}{l}\,\bar{y},\\&u=\bar{u},\ u_1=\bar{u}_1,\quad v=\frac{l}{r}\left(\bar{v}+\frac{\bar{y}}{r}\,\frac{dr}{d\bar{x}}\,\bar{u}\right)\end{aligned}\right\} \tag{12.3}$$

成立(但 $l$ 是适当的长度),則 (12.1) 及 (12.2) 就各和 (8.1) 及 (8.7)完全一致了。換言之,軸对称流的方程用变换(12.3)可归結到二維流的方程(Mangler, 1948; 细中, 1949)。又令軸对称流及二維流的排除厚度各为 $\bar{\delta}^*$ 及 $\delta^*$, 則有

$$\bar{\delta}^*=\int_0^\infty\left(1-\frac{\bar{u}_1}{u_1}\right)d\bar{y}=\frac{l}{r}\int_0^\infty\left(1-\frac{u}{u_1}\right)dy=\frac{l}{r}\,\delta^*,$$

所以其間又有下列关系成立:

$$\bar{\delta}^{*2}\,\frac{\bar{u}_1}{\nu\bar{x}}=\delta^{*2}\,\frac{u_1}{\nu x}\left[\frac{1}{r^2\bar{x}}\int_0^{\bar{x}}r^2d\bar{x}\right]. \tag{12.4}$$

作为簡单的例,考虑軸对称的駐点附近的流 $r=b\bar{x}$, $\bar{u}_1=c\bar{x}$。由(12.3),有 $x=\bar{x}^3b^2/3l^2$, 所以 $\bar{x}=(3l^2x/b^2)^{1/3}$, 于是相对应的二維流边界层外側的速度变为

$$u_1=\bar{u}_1=c\bar{x}=c(3l^2/b^2)^{1/3}x^{1/3}.$$

---

❶ 只要 $\varkappa\delta$ 和 $\delta^2\,\frac{d\varkappa}{dx}$ 都很小,其中 $\varkappa$ 是子午周綫的曲率。——校者注

对于这个流的解，可由§9，2)的 $m=1/3$ 的情形給出来。又(12.4)变为

$$\bar{\delta}^*\sqrt{\frac{\bar{u}_1}{\nu\bar{x}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\delta^*\sqrt{\frac{u_1}{\nu x}},$$

所以将 $\bar{x}$ 和 $x$ 的同一值比較时[1]，軸对称流的排除厚度比二維流的薄了 $1/\sqrt{3}$。这是因为和二維边界层不同，流綫是可以向横的方向延展所致。

**2) 对于流傾斜地放置的柱体的情形** 如图 12.2，和柱体的母綫平行着量取 $z$，在垂直于母綫的断面內和二維情形同样量取 $x$ 及 $y$。設 $x, y, z$ 方向的速度分量各为 $u, v, w$，則由(2.1)得連續方程

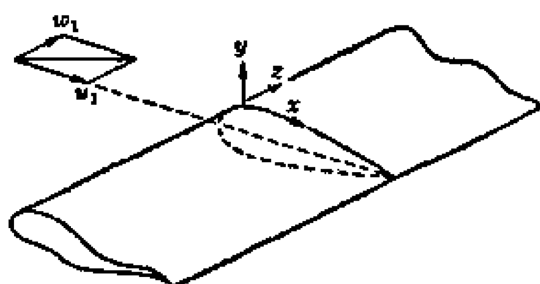


图 12.2

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0; \quad (12.5)$$

而在(2.2)內略去时間微分后，N. S. 方程可表为

$$\left.\begin{aligned}
&\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)\\
&\qquad=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),\\
&\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)\\
&\qquad=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right),\\
&\rho\left(u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)\\
&\qquad=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right).
\end{aligned}\right\}\quad(12.6)$$

[1] 若在变换(12.3)中考虑 $x=c^3\frac{1}{l^2}\int_0^{\bar{x}}r^2d\bar{x}$，$c$ 为一未定比例尺常数，可对某一 $\bar{x}$，定出 $c$，使 $x=\bar{x}$。——校者注

在此反复应用与§8同样的討論，首先在(12.6)的第一式及第三式里的粘性项，各仅考虑$\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$及$\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$的项就够了。由第二式得$\partial p/\partial y=0$。今若考虑无限长柱体的情形，则流的状态在$z$方向不变，$z$微分的项都消去。設边界层外側的$u$及$w$各为$u_1$及$w_1$，则$u_1$仅为$x$的函数，$w_1$一定，于是上式变为

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{12.7}$$

$$\left.\begin{aligned}u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}&=u_1\frac{du_1}{dx}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\\ u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}&=\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.\end{aligned}\right\} \tag{12.8}$$

边界条件是

$$\left.\begin{aligned}&y=0:\quad u=0,\ v=0,\ w=0,\\ &y=\infty:\quad u=u_1, w=w_1.\end{aligned}\right\} \tag{12.9}$$

(12.7)及(12.8)的第一式各与(8.1)及(8.7)相同，所以将$u$及$v$看作二維流来計算即可。决定$u$及$v$后代入到(12.8)的第二式里就可求出$w$(Prandtl, 1945; Jones, 1947; Sears, 1948)。

作为簡单的例题，考虑$x$方向的速度分布为$u_1=c_1x(1-x^2/l^2)$的情形。这个速度分布是§9, 3)所处理情形的特例，速度分量$u$为

$$u=c_1x[f_1'(\eta)-4(x^2/l^2)f_3'(\eta)+6(x^4/l^4)h_5'(\eta)+\cdots].$$

$f_1, f_3, f_5, \cdots$都是$\eta=y\sqrt{c_1/\nu}$的函数，撇号表示对于$\eta$的导数，在$y=0$使$\partial u/\partial y$为零的点是$x/l=0.693$。用这个結果求$w$，便得

$$w=w_1[g_0(\eta)-(x^2/l^2)g_2(\eta)+\cdots],$$

这里$g_0, g_2, \cdots$是

$$g_0''+f_1g_0'=0,\ \ g_2''+f_1g_2'-2f_1'g_2+12f_3g_0'=0,\ \cdots,$$

在边界条件

$$\eta=0: \quad g_0=0,\ g_2=0,\ \cdots,$$
$$\eta=\infty: \quad g_0=1,\ g_2=0,\ \cdots$$

下的解。

## §13 压縮性流体的边界层

在 §8～§12 的論述，都曾略去流体的压縮性。但在那里所用的概念和方法都可照样用在考虑压縮性的高速气流的边界层里。这时須加上热的现象，还必須在速度之外考虑温度由物体表面的值到外侧流的值所发生的急剧变化。

为了簡单起見，处理无外力的定常二維流，則連續方程(1.2)，N. S. 方程(1.13)，能量方程(1.17)及状态方程(1.1)可各改写成下列形状：

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)=0, \tag{13.1}$$

$$\left.\begin{aligned}
\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)&=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\
&\quad+\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]-\frac{\partial \mu}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x},\\
\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)&=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\
&\quad+\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial \mu}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x},
\end{aligned}\right\}\tag{13.2}$$

$$\begin{aligned}
\rho\left(u\frac{\partial I}{\partial x}+v\frac{\partial I}{\partial y}\right)&=u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right.\\
&\quad\left.+2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right),
\end{aligned}\tag{13.3}$$

$$p=\Re\rho T. \tag{13.4}$$

記号都和 §8～§11 完全一样。此外还用了些新記号，如温度 $T$、

气体常数 $\mathfrak{R}$、焓 $I$ 及热傳导系数 $\lambda$。$\rho$, $\mu$ 及 $\lambda$ 都是 $T$ 的函数，所以必須作为 $x$ 及 $y$ 的函数来处理。但假定是理想气体的情形，可以略去定压比热 $c_p$ 由于温度所发生的变化❶。設 $I=c_pT$。此处对(13.2)及(13.3)作和 §8 同样的討論，則在边界层里得到

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{dp}{dx}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{13.5}$$

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=u\frac{dp}{dx}+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right). \tag{13.6}$$

比較这些式子里两边的最后項，就可看出：速度变化的显著范圍(速度边界层)的厚度 $\delta$ 和 $\sqrt{\mu/\rho}$ 成比例，温度变化的显著范圍(温度边界层)的厚度 $\delta_T$ 和 $\sqrt{\lambda/\rho c_p}$ 成比例。所以 $\delta/\delta_T$ 与叫作"Prandtl 数"的无因次量

$$\sigma=\frac{\mu c_p}{\lambda} \tag{13.7}$$

的平方根成比例。空气的 $\sigma$ 对于温度几乎不发生变化，其値大概等于 0.72，两个边界层应該具有同一量級的厚度。边界条件在物体表面(用标数 $w$ 来区别)及边界层外側(用标数 1 来区别)各为

$$\left.\begin{aligned} y=0:&\quad u=0,\ v=0,\ T=T_w;\\ y=\delta:&\quad u=u_1;\\ y=\delta_T:&\quad T=T_1.\end{aligned}\right\} \tag{13.8}$$

若物体表面是热絶緣的，則在 $y=0$ 的温度条件变成 $\partial T/\partial y=0$。

现在为了簡单起見，考虑温度 $T$ 仅为速度分量 $u$ 的函数的情形。設 $T=T(u)$，代入到(13.6)内，为了使結果和(13.5)相同，必須有❷

---

❶ 对于空气，当温度在 1000°K 以下时，认为 $c_p$ 为常数（≈0.24 大卡/公斤 °C）带来的誤差不超过 6%。——校者注

❷ 对于常温平板边界层一般就有关系 $T=T(u)$，不必具有所述条件(13.9)，見 Howarth 的书第十章 § 12。——校者注

$$\sigma=1,\quad c_p\frac{d^2T}{du^2}+1=0,\quad c_p\frac{dT}{du}+u=0. \tag{13.9}$$

这个条件当取 Prandtl 数为 1 且假定物体表面是絕热的情形可以满足，此时温度分布可用

$$\frac{T}{T_1}=1+\frac{1}{2c_pT_1}(u_1^2-u^2)=1+\frac{\gamma-1}{2a_1^2}(u_1^2-u^2) \tag{13.10}$$

給出来❶（$\gamma=c_p/c_v$ 是比热比，$a_1=\sqrt{\gamma\mathfrak{R}T_1}$ 是相当于边界层外側状态的声速）。也就是說当这种条件成立时，焓 $c_pT$ 与动能 $u^2/2$ 的和在边界层里保持定值 (Crocco, 1931; Busemann, 1935)。

空气及其他气体的粘性系数的温度变化，可用所謂 Sutherland 公式表示为

$$\mu=\mu_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{T_0+\mathfrak{S}}{T+\mathfrak{S}}. \tag{13.11}$$

但在空气的情形 $\mathfrak{S}$ 是 120°C❷。下标 0 表示适当的标准状态，在現在的情形采用边界层外側流的标准状态。特别用 (13.11) 原来的形状作計算时相当复杂，所以用

$$\mu=C\mu_0\frac{T}{T_0} \tag{13.12}$$

作近似，$C$ 是如此选取的常数，它使这个关系和(13.11)在物体表面上一致 (Chapman 及 Rubesin, 1949)。也就是說，設物体表面的平均($x$ 方向的)温度为 $\overline{T}_w$，我們采用

$$C=\left(\frac{\overline{T}_w}{T_0}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{T_0+\mathfrak{S}}{\overline{T}_w+\mathfrak{S}}. \tag{13.13}$$

又在边界层里有 $\partial p/\partial y=0$，所以由(13.4)可設

---

❶ 由这个結果可知，物体表面的温度 $T_w$ 等于 $T_1\left[1+\frac{1}{2}(\gamma-1)(u_1^2/a_1^2)\right]$，$\sigma$ 虽不等于 1，但离开 1 不远时，有近似关系式 $T_w=T_1\left[1+\frac{1}{2}\sqrt{\sigma}(\gamma-1)(u_1^2/a_1^2)\right]$ 成立 (Pohlhausen, 1921)。

❷ 对空气而言，$\mathfrak{S}$ 为 120°K (絕对温度)。——校者注

$$\rho=\rho_1\frac{T_1}{T}. \tag{13.14}$$

又对于边界层的外侧流，Bernoulli方程(1.25)可表示成如下形状

$$\frac{1}{2}u_1^2+\frac{a_1^2}{\gamma-1}=\text{常数}, \tag{13.15}$$

若再假定流是等熵的，则有

$$\frac{p_1}{p_0}=\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^\gamma=\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}. \tag{13.16}$$

在这些前提下，考虑連續方程 (13.1) 及边界层方程 (13.5)。首先用

$$\rho u=\rho_0\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial y}, \quad \rho v=-\rho_0\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}, \tag{13.17}$$

导入流函数 $\tilde{\psi}$，则(13.1)可自动地滿足。再用

$$\tilde{x}=C\int_a^x\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{\frac{3\gamma-1}{\gamma-1}}dx, \quad \tilde{y}=\frac{a_1}{a_0}\int_0^y\frac{\rho}{\rho_0}\,dy, \tag{13.18}$$

所定义的 $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ 代替 $x$, $y$，且設

$$\tilde{u}_1=\frac{a_0}{a_1}u_1, \tag{13.19}$$

则(13.5)变换为

$$\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{y}}\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial\tilde{x}\partial\tilde{y}}-\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{x}}\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial\tilde{y}^2}=\tilde{u}_1\frac{d\tilde{u}_1}{d\tilde{x}}+\nu_0\frac{\partial^3\tilde{\psi}}{\partial\tilde{y}^3}. \tag{13.20}$$

边界条件是

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{y}=0: \quad \tilde{\psi}=0, \qquad \partial\tilde{\psi}/\partial\tilde{y}=0,\\ &\tilde{y}=\frac{a_1}{a_0}\int_0^\delta\frac{\rho}{\rho_0}\,dy: \quad \partial\tilde{\psi}/\partial\tilde{y}=\tilde{u}_1.\end{aligned}\right\} \tag{13.21}$$

这些关系和不可压縮性边界层的 (8.9)，(8.10) 及 (8.11) 的形状完全相同(Stewartson, 1949)。

特别地，当 $u_1$ 一定，且等于 $u_0$ 时，有 $\tilde{x}=Cx$, $\tilde{u}_1=u_1$. 此时在 (9.1) 及 (9.2) 內各用 $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ 及 $\nu_0$ 代替 $x$, $y$ 及 $\nu$，就可用所得的 $\psi$

値給出 $\widetilde{\psi}$ 来。所以长度为 $l$ 的平板的摩阻是

$$F=\int_0^l\left[\mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial\widetilde{y}}\right)\right]_{y=0}dx=\frac{A}{2\sqrt{C}}\rho_0u_0^2l\,\frac{\rho_w\mu_w}{\rho_0\mu_0}\sqrt{\frac{\nu_0}{u_0l}},$$

无因次的摩阻系数是

$$C_f=\frac{F}{(\rho_0u_0^2/2)l}=1.3282\sqrt{C}\sqrt{\frac{\nu_0}{u_0l}}. \qquad (13.22)$$

也就是說，用外側流的密度及运动粘性系数定义 $C_f$ 及 Reynolds 数 $u_0l/\nu_0$ 时，将压縮性情形的 $C_f$ 和不可压縮性流体的 $C_f$ (9.12) 相比較，仅变化了 $\sqrt{C}$ 倍。在現在的例子里，$C$ 的定义式 (13.13) 里的 $\overline{T}_w$，由 (13.10) 可知必等于 $T_0\left[1+\frac{1}{2}(\gamma-1)(u_0^2/a_0^2)\right]$。采用 $\gamma=1.4$ 时 $C_f\sqrt{(u_0l/\nu_0)}$ 由于"Mach 数" $M=u_0/a_0$ 所产生的变化，可表示如图 13.1。又

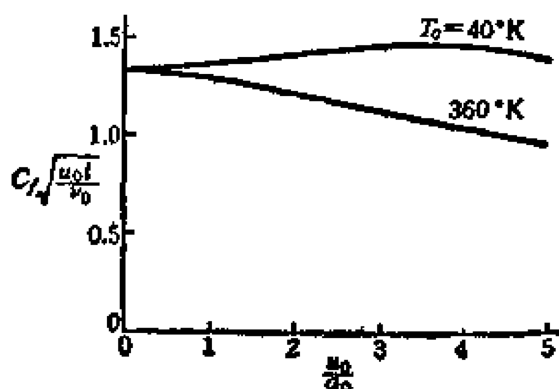



图 13.1

$$y=2\sqrt{\frac{\nu_0\bar{x}}{u_0}}\left[\zeta+\frac{\gamma-1}{2}M^2\left(\zeta-\frac{1}{4}ff'-\frac{1}{4}f''+0.33206\right)\right]^{[1]}, \qquad (13.23)$$

所以如将 $u/u_0=0.999$ 时 $(\zeta\approx3)$ 的厚度定义为 $\delta$，則有

$$\delta=(\delta)_{M=0}[1+0.1987(\gamma-1)M^2]. \qquad (13.24)$$

---

[1] 式中 $f(\zeta)$ 为 Blasius 函数，$\zeta=\frac{1}{2}\left(\frac{u_0}{\nu_0x}\right)^{\frac{1}{2}}\widetilde{y}$.——校者注

也就是說，边界层的厚度随着 Mach 数同时显著地增加❶。

在 $\tilde{u}_1=c\tilde{x}^m$ 的情形，(13.20) 的解已在 § 9,2) 求得。特别因为它是对于变换后的坐标 $(\tilde{x}, \tilde{y})$ 所表示的流，所以必須計算用逆变换回到原来坐标 $(x, y)$ 的流。此时若用标数 0 表示使 $\tilde{u}_1=0$ 的点的状态，则由

$$u_1^2=\frac{a_0c^2\tilde{x}^{2m}}{a_0^2+\frac{1}{2}(\gamma-1)c^2\tilde{x}^{2m}},\quad \frac{dx}{d\tilde{x}}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2a_0^2}c^2\tilde{x}^{2m}\right)^{\frac{3\gamma-1}{\gamma-1}}\tag{13.25}$$

可将 $u_1$ 决定为 $x$ 的函数。

若在 Mach 数非常大，例如超过 6 的量級，上述的边界层显著地加厚，和外側流之間就发生干扰。也就是說在这种情形，卽使 Reynolds 数不小，也能和 § 11 的小 Reynolds 数流情形引起同样现象。若考虑沿着平板的流，就得到图 13.2 那样，給出边界层和"冲击波"互相干扰的情况。冲击波前后的压力比 $p_0/p$（$p_0$ 是冲击波前的压力，在现在的問題里它是均匀流的压力，$p$ 是冲击波后的压力）和冲击波后的流的傾斜度 $\theta$ 間，用所謂 Rankine-Hugoniot 关系式互相关联着，但当冲击波前方的 Mach 数 $M$（在现在的問題里是 $u_0/a_0$）大的时候，这个关系式可表示成如下形状：



图 13.2

$$\frac{p}{p_0}=1+\frac{\gamma(\gamma+1)}{4}M^2\theta^2+\gamma M\theta\sqrt{1+\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2M^2\theta^2}.\tag{13.26}$$

在远离平板前沿的地方 $\theta$ 十分小，$M\theta$ 也小，所以 (13.26) 可用

$$\frac{p}{p_0}=1+\gamma M\theta\tag{13.27}$$

作近似。与此相反，在离前沿近的地方，$M\theta$ 是大的，所以 (13.26) 要用

---

❶ 見 Howarth: Proc. Roy. Soc. (London), A, 194, 1948.——校者注

$$\frac{p}{p_0}=\frac{\gamma(\gamma+1)}{2}M^2\theta^2 \tag{13.28}$$

作近似。

在(13.5)里，左边的惯性项是 $\rho_m u_0^2/x$ 的量級，右边的粘性項是 $\mu_m u_0/\delta^2$ 的量級（标数 $m$ 表示在 $y$ 方向的平均値）。为了使双方为同量級，則 $\delta^2$ 必須是 $\mu_m x/\rho_m u_0$ 的量級的。由(13.4)有 $\rho_m=\rho_0(p/p_0)(T_0/T_m)$，由(13.12)有 $\mu_m=c\mu_0(T_m/T_0)$，更由(13.10)可知 $T_m/T_0$ 是 $M^2$ 的量級，所以命 $A$ 为无因次的常数时，則有

$$\delta^2=A^2CM^4\frac{\nu_0 x}{u_0}\frac{p_0}{p}. \tag{13.29}$$

前边出现的 $\theta$，实际上等于 $d\delta/dx$[1]，所以由(13.27)有

$$\frac{p}{p_0}=1+\frac{\gamma}{2}A\chi+O(\chi^2). \tag{13.30}$$

又由(13.28)得到[2]

$$\frac{p}{p_0}=\frac{3}{4\sqrt{2}}\sqrt{\gamma(\gamma+1)}A\chi[1+O(\chi^{-1})]. \tag{13.31}$$

这里

$$\chi=\sqrt{C}M^3\sqrt{\frac{\nu_0}{u_0 x}} \tag{13.32}$$

是这个問題的参数，$\chi$ 的小值相当于远离前沿的部分，$\chi$ 的大值相当于接近前沿的部分。此处得到的結果表明，由于边界层和冲击波的干扰，沿着平板的压力分布是不均匀的，在 $x$ 的方向它逐漸減小(Shen, 1952; Lees 及 Probstein, 1952)。又由这个結果可以想象到，在远离前沿的地方用 $\chi$ 的冪級数，接近前沿的地方用 $\chi^{-1}$ 的冪級数可以求得 N S 方程的解 (Lees, 1953)。在远离前沿的地方的現象类似于§11所說的情况，但在接近前沿处发生相互干扰，那是大 Mach 数流的特有現象。

---

[1] 严格地說来，$\theta=d\delta^*/dx$，但在 $M$ 大的时候排除厚度差不多等于 $\delta$。

[2] (13.30)的 $A$ 和(13.31)的 $A$，在一般情形是相同的。

# 第4章 稳定理論

## §14 对于微小扰动的稳定理論

在 Reynolds 数十分大的情形，流体运动很少能保持着規則的层流，差不多都有不規則的紊流出現。这个經驗事实指出，作为流体运动来看，紊流是自然的状态，层流只有在 Reynolds 数很小而且对于它的偏差漸次衰減以致于消失的情形才可能出現。实际上可以观察到，对于某些流当由外部来的扰动逐漸減少时，Reynolds 数虽逐漸增加到大值仍可以保持着层流。因此就产生了这样的問題，就某些給定的流考虑对于无限小扰动的稳定性。

将这个問題用数学語言表达出来，就是考虑流体运动方程的初始值問題，而其速度压力的初始值和已給定常解有很小的变动。这問題的解随时間的增加趋近于定常解时运动是稳定的，否则就是不稳定的。特别是，不稳定并不一定限于有紊流产生，也可能逐漸变成其他种类的层流。

为了避免处理非綫性偏微分方程的困难，假定对于微小扰动，方程已經是綫性化的。也就是說，假定由于将扰动及其导数的二次以上的項略去而得到的綫性方程，可以将扰动随时間的变化完全决定。这个方程只含有对时間的导数而不显含时間 $t$，所以可以預期能有和指数函数 $e^{\sigma t}$ 成比例的解。对于扰动的边界条件一般是齐次的，所以就变成处理以 $\sigma$ 为特征值的边界值問題。特征值 $\sigma$ 的实部都为負时，运动对于微小扰动是稳定的，若其中含有正的就是不稳定的。

若无外力，且无考虑压縮性影响的必要时，連續方程(1.26)及

运动方程(1.29)各为

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0, \tag{14.1}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\nabla^2 u_i. \tag{14.2}$$

这里 $t$ 是时間，$u_i(u_1, u_2, u_3)$ 是对于直交坐标 $x_i(x_1, x_2, x_3)$ 的速度分量，$p$ 是压力，$\rho$ 是密度，$\nu$ 是运动粘性系数，$\nabla^2$ 表示 Laplace 算子 $\partial^2/\partial x_1^2+\partial^2/\partial x_2^2+\partial^2/\partial x_3^2$。边界条件，例如在物体表面上可表为

$$u_i=u_{i_w}. \tag{14.3}$$

在此若将速度分量和压力各分解成不随时間变化的定常解(带横綫的)及随时間变化的扰动(带撇号的)，如

$$u_i=\bar{u}_i+u_i', \quad p=\bar{p}+p', \tag{14.4}$$

则定常解满足方程

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i}=0, \tag{14.5}$$

$$\bar{u}_j\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}+\nu\nabla^2\bar{u}_i, \tag{14.6}$$

及边界条件

$$\bar{u}_i=u_{i_w}. \tag{14.7}$$

在导出扰动所应該满足的方程时，将(14.4)代入(14.1)及(14.2)，再参照(14.5)及(14.6)就行了。若扰动十分小，略去其二次以上的項，得

$$\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}=0, \tag{14.8}$$

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t}+\bar{u}_j\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+u_j'\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_i}+\nu\nabla^2 u_i'. \tag{14.9}$$

在物体表面上的边界条件，参照(14.3)及(14.7)可表示为

$$u_i'=0. \tag{14.10}$$

若要实际地解这些方程而研究扰动随时間的变化，那就有必要限定問題对于各个定常解来作考虑。在后面三节里将説明这样的方法。

## §15 旋轉圓筒間的流的稳定性

設有两个共軸的无限长圓筒，各用任意角速度作旋轉，考虑它們两者間所夹着的流体的运动。这种运动的稳定性最初由 Taylor (1923) 所解决，并且和观察的結果頗能符合，所以他的解很重要。

按照問題的性质，采用以圓筒共同軸为 $z$ 軸的圓柱面坐标 $(r, \theta, z)$，命速度分量为 $(u, v, w)$，則和 (14.1) 及 (14.2) 相当的方程各由 (2.16) 及 (2.17) 給出，其定常解可表示为

$$\bar{u}=0,\ \ \bar{v}=\omega_1(Ar+Br_1^2/r),\ \ \bar{w}=0; \tag{15.1}$$

$$A=\frac{\omega_2 r_2^2-\omega_1 r_1^2}{\omega_1(r_2^2-r_1^2)},\quad B=-\frac{(\omega_2-\omega_1)r_2^2}{\omega_1(r_2^2-r_1^2)}. \tag{15.2}$$

此处 $r_1$ 及 $r_2$ 各为内筒及外筒的半徑，$\omega_1$ 及 $\omega_2$ 各为它們的角速度。扰动的速度分量 $(u', v', w')$ 及压力 $p'$ 所应該满足的方程是

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru')+\frac{1}{r}\frac{\partial v'}{\partial \theta}+\frac{\partial w'}{\partial z}=0, \tag{15.3}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u'}{\partial t}+\frac{\bar{v}}{r}\frac{\partial u'}{\partial \theta}-\frac{2\bar{v}}{r}v' \\
&\qquad=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial r}+\nu\left(\nabla^2 u'-\frac{u'}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v'}{\partial \theta}\right),\\
&\frac{\partial v'}{\partial t}+\frac{\bar{v}}{r}\frac{\partial v'}{\partial \theta}+\left(\frac{d\bar{v}}{dr}+\frac{\bar{v}}{r}\right)u' \\
&\qquad=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p'}{\partial \theta}+\nu\left(\nabla^2 v'-\frac{v'}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u'}{\partial \theta}\right),\\
&\frac{\partial w'}{\partial t}+\frac{\bar{v}}{r}\frac{\partial w'}{\partial \theta}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial z}+\nu\nabla^2 w'
\end{aligned}\right\} \tag{15.4}$$

$(\nabla^2=\partial^2/\partial r^2+r^{-1}\partial/\partial r+r^{-2}\partial^2/\partial\theta^2+\partial^2/\partial z^2)$。边界条件是

$$\text{在 } r=r_1 \text{ 及 } r=r_2 \text{ 处}\qquad u'=v'=w'=0. \tag{15.5}$$

在此利用 $r_1$ 及 $\omega_1$ 导入无因次量

$$\tau=\omega_1 t,\quad \tilde{\omega}=\frac{r}{r_1},\quad \zeta=\frac{z}{r_1},\quad R=\frac{\omega_1 r_1^2}{\nu}\tag{15.6}$$

作为扰动，可假定它們和 $\theta$ 无关，而在 $z$ 方向是周期地变化的，所以其形式为

$$\left.\begin{aligned}
u'&=\omega_1 r_1\hat{u}(\tilde{\omega})\exp(i\beta\zeta+\sigma\tau),\\
v'&=\omega_1 r_1\hat{v}(\tilde{\omega})\exp(i\beta\zeta+\sigma\tau),\\
w'&=\omega_1 r_1\hat{w}(\tilde{\omega})\exp(i\beta\zeta+\sigma\tau),\\
p'&=\rho\omega_1^2 r_1^2\hat{p}(\tilde{\omega})\exp(i\beta\zeta+\sigma\tau).
\end{aligned}\right\}\tag{15.7}$$

这里 $i=\sqrt{-1}$, $\beta$ 是正的实数，$\sigma$ 是复数，但在(15.7)的右側假定只取它的实部。将此代入(15.3)及(15.4)，則得决定振幅 $\hat{u}$, $\hat{v}$, $\hat{w}$, $\hat{p}$ 的常微分方程

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{d}{d\tilde{\omega}}+\frac{1}{\tilde{\omega}}\right)\hat{u}+i\beta\hat{w}=0,\\
&\left[\frac{1}{R}(L-\beta^2)-\sigma\right]\hat{u}=\frac{d\hat{p}}{d\tilde{\omega}}-2\left(A+\frac{B}{\tilde{\omega}^2}\right)\hat{v},\\
&\left[\frac{1}{R}(L-\beta^2)-\sigma\right]\hat{v}=2A\hat{u},\\
&\left[\frac{1}{R}\left(L-\beta^2+\frac{1}{\tilde{\omega}^2}\right)-\sigma\right]\hat{w}=i\beta\hat{p}
\end{aligned}\right\}\tag{15.8}$$

($L=d^2/d\tilde{\omega}^2+\tilde{\omega}^{-1}d/d\tilde{\omega}-\tilde{\omega}^{-2}$)，由它們消去 $\hat{w}$ 及 $\hat{p}$ 得到 $\hat{u}$ 及 $\hat{v}$ 的方程

$$\left.\begin{aligned}
&(L-\beta^2-\sigma R)(L-\beta^2)\hat{u}=2\beta^2R(A+B/\tilde{\omega}^2)\hat{v},\\
&(L-\beta^2-\sigma R)\hat{v}=2RA\hat{u}.
\end{aligned}\right\}\tag{15.9}$$

边界条件是

$$\text{在 }\tilde{\omega}=1\text{ 及 }\tilde{\omega}=\frac{r_2}{r_1}\text{ 有}\qquad \hat{u}=\frac{d\hat{u}}{d\tilde{\omega}}=\hat{v}=0.\tag{15.10}$$

为了使这些关系相互无矛盾，就应該有特性方程

$$F(\sigma, \beta; r_2/r_1, \omega_2/\omega_1, R)=0. \tag{15.11}$$

由于算子 $L$ 的形状，象預期的那样，我們将采用一阶的 Bessel 函数 $J_1$ 及 $Y_1$ 所作的直交函数❶

$$S_n(\tilde{\omega})=C_n[J_1(\varkappa_n)Y_1(\varkappa_n\tilde{\omega})-Y_1(\varkappa_n)J_1(\varkappa_n\tilde{\omega})].$$

其中 $\varkappa_n$ 是 $J_1(\varkappa)Y_1(\varkappa r_2/r_1)-Y_1(\varkappa)J_1(\varkappa r_2/r_1)=0$ 的根，$C_n$ 由条件

$$\int_1^{r_2/r_1} S_m S_n d\tilde{\omega}=1 \quad (m=n), \qquad =0 \quad (m\neq n)$$

所决定。今假定 $\hat{u}$ 及 $\hat{v}$ 可展成級数

$$\hat{u}(\tilde{\omega})=\sum_{n=1}^{\infty} a_n S_n, \quad \hat{v}(\tilde{\omega})=\sum_{n=1}^{\infty} b_n S_n,$$

由关于 $d\hat{u}/d\tilde{\omega}$ 的边界条件得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n S_n'(1)=0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n S_n'\left(\frac{r_2}{r_1}\right)=0. \tag{15.12}$$

撇号表示对于 $\tilde{\omega}$ 的导数，但并未假定对这些級数能进行若干次的逐項微分，所以不能照原样代入(15.9)。若先将(15.9)的各式乘以 $\tilde{\omega}S_n$，再对 $\tilde{\omega}$ 自 1 到 $r_2/r_1$ 作积分，而后再代入到这样得到的关系式里去，則得❷

$$\left.\begin{aligned} &-[S_n'T]_1^{r_2/r_1}+(\varkappa_n^2+\beta^2)(\varkappa_n^2+\beta^2+\sigma R)a_n \\ &\qquad =2\beta^2 R\left[Ab_n+B\sum_{m=1}^{\infty} a_m\int_1^{r_2/r_1} S_m S_n\frac{d\tilde{\omega}}{\tilde{\omega}}\right], \\ &-(\varkappa_n^2+\beta^2+\sigma R)b_n=2RAa_n, \end{aligned}\right\} \tag{15.13}$$

此处 $T=\hat{u}''\tilde{\omega}$，由它們之間消去 $b_n$，就得到关于 $T(1)$，$T(r_2/r_1)$，

---

❶ $J_1(\varkappa\tilde{\omega})$ 和 $Y_1(\varkappa\tilde{\omega})$ 是方程 $(L+\varkappa^2)\omega=0$ 的两个独立解。——校者注

❷ 由于 $\int_1^{r_2/r_1}\tilde{\omega}S_n(\tilde{\omega})L(F)d\tilde{\omega}=-\left[\frac{ds}{d\tilde{\omega}}\tilde{\omega}F\right]_1^{r_2/r_1}+\int_1^{r_2/r_1}\tilde{\omega}FL(S_n)d\tilde{\omega}$。——校者注

及 $a_1, a_2, \cdots$的无数个綫性方程。将它們和(15.12)結合起来，命其行列式为零，就可具体地决定出特性方程(15.11)了。

在此我們将特别考虑 $\sigma=0$ 的情形，这是相当于扰动既不衰减也不增加的“中立状态”的情形。对給出的 $r_2/r_1$ 及 $\omega_2/\omega_1$ 的值，对于长 $2\pi r_1$ 的 Reynolds 数是可以当作波数 $\beta$ 的函数来决定的。通常 Reynolds 数对波数的某个值取最小值，这个最小值叫作“临界 Reynolds 数”。也就是説对于临界 Reynolds 数以下的 Reynolds 数，无論怎样波数的扰动也是衰減的，对于临界数以上的 Reynolds 数，在某一波数范圍内的扰动是增大的，其他的扰动是衰减的。

图 15.1 里的曲綫，是对于 $r_1=3.55$ 厘米，$r_2=4.035$ 厘米計算的結果。作为 Reynolds 数，我們用 $\omega_1(r_2-r_1)^2/\nu$ 代替了 $R=\omega_1 r_1^2/\nu$，将其临界値表示为 $\omega_2(r_2-r_1)^2/\nu$ 的函数。在曲綫的上側，某一波数范圍内扰动是增加的，在其下側所有的扰动都是衰減的。又在纵坐标的右側，两个圓筒在同向旋轉，左側在相反方向旋轉。該图上的小白圈表示 Taylor 本人所作的实驗結果，它和理論曲綫极为一致。

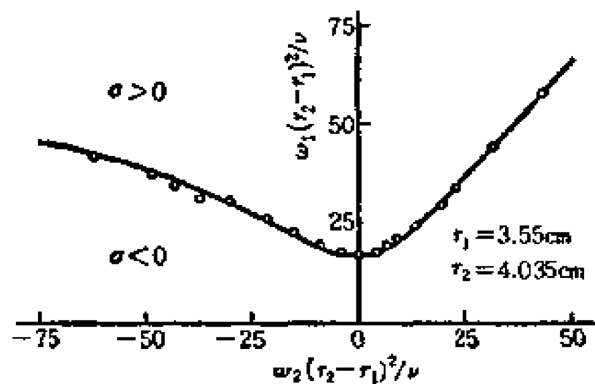


图 15.1

此时出現的扰动是圍繞旋轉軸有規律的渦圈，角速度 $\omega_1$ 稍微增加在临界值以上一些时这些圈也不破坏。扰动的这种稳定情形使流的边界条件容易具体化，同时可认为这也是使实驗結果能和理論很符合的原因。特别是，有規律的平稳渦圈并不是表示所謂紊流的脉动的。若更增加角速度 $\omega_1$ 时，这些渦圈就要破坏，在其后便出現了本质的紊流。

## §16 平行壁間的流的稳定性

考虑两个平行的无限寬广的壁間的二維流。采用直角坐标$(x, y, z)$，取和壁平行的主流方向为 $x$ 軸，垂直于壁面取 $y$ 軸，对于它們的速度分量設为$(u, v, w)$。在壁的間隔中心取原点，用 $y=\pm b$ 表示壁面(参照图2.1❶)，在壁面上满足边界条件的定常解是

$$\left.\begin{aligned}\bar{u}&=\bar{u}_1\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right),\\ \bar{v}&=\bar{w}=0,\\ \bar{p}&=-\frac{2\rho\nu\bar{u}_1}{b^2}x.\end{aligned}\right\}\tag{16.1}$$

利用間隔的一半 $b$ 及在中心的速度 $\bar{u}_1$ 定义无因次量

$$\xi=\frac{x}{b},\ \eta=\frac{y}{b},\ \zeta=\frac{z}{b},\ \tau=\frac{\bar{u}_1t}{b},\ U=\frac{\bar{u}}{\bar{u}_1},\ R=\frac{\bar{u}_1b}{\nu},\tag{16.2}$$

假定取 $x$ 及 $z$ 方向的周期扰动的形状为

$$\left.\begin{aligned}u'&=\bar{u}_1\hat{u}(\eta)\exp[i(\alpha\xi+\beta\zeta)-i\alpha c\tau],\\ v'&=\bar{u}_1\hat{v}(\eta)\exp[i(\alpha\xi+\beta\zeta)-i\alpha c\tau],\\ w'&=\bar{u}_1\hat{w}(\eta)\exp[i(\alpha\xi+\beta\zeta)-i\alpha c\tau],\\ p'&=\rho\bar{u}_1^2\hat{p}(\eta)\exp[i(\alpha\xi+\beta\zeta)-i\alpha c\tau].\end{aligned}\right\}\tag{16.3}$$

$i=\sqrt{-1}$，$\alpha$ 及 $\beta$ 是正的实数，各为 $x$ 及 $z$ 方向在长度 $2\pi b$ 里所含的波数，$c$ 通常是复数$(=c_r+ic_i)$，$\bar{u}_1c_r$ 是扰动的位相速度，$(\bar{u}_1/b)\alpha c_i$ 表示对数的增加率，設在(16.3)的右边取它的实部。$c_i>0$ 时扰动是增大的(不稳定)，$c_i<0$ 时是衰減的(稳定)。当 $c_i=0$ 时則 $c=c_r$，扰动不增減，是和中立稳定状态相对应的。将(16.3)代入(14.8)及(14.9)，就得到决定扰动的振幅分布 $\hat{u}$, $\hat{v}$, $\hat{w}$, $\hat{p}$ 的常微分方程

❶ 图2.1的 $u$ 相当于此处所用的 $\bar{u}$。

$$\left.\begin{aligned}
&i(\alpha\hat{u}+\beta\hat{w})+D\hat{v}=0,\\
&\left[\frac{1}{R}(D^2-\alpha^2-\beta^2)-i\alpha(U-c)\right]\hat{u}=(DU)\hat{v}+i\alpha\hat{p},\\
&\left[\frac{1}{R}(D^2-\alpha^2-\beta^2)-i\alpha(U-c)\right]\hat{v}=D\hat{p},\\
&\left[\frac{1}{R}(D^2-\alpha^2-\beta^2)-i\alpha(U-c)\right]\hat{w}=i\beta\hat{p}
\end{aligned}\right\}\tag{16.4}$$

(但 $D=d/d\eta$)，边界条件是

$$\eta=\pm1:\quad \hat{u}=\hat{v}=\hat{w}=0.\tag{16.5}$$

若扰动是二維的，則有 $\hat{w}=0$, $\beta=0$, 于是(16.4)变为

$$\left.\begin{aligned}
&i\alpha\hat{u}+D\hat{v}=0,\\
&\left[\frac{1}{R}(D^2-\alpha^2)-i\alpha(U-c)\right]\hat{u}=(DU)\hat{v}+i\alpha\hat{p},\\
&\left[\frac{1}{R}(D^2-\alpha^2)-i\alpha(U-c)\right]\hat{v}=D\hat{p}.
\end{aligned}\right\}\tag{16.6}$$

在另一方面，对于(16.4)作变换❶

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{\alpha}\tilde{u}=\alpha\hat{u}+\beta\hat{w},\ \tilde{v}=\hat{v},\ \tilde{p}\tilde{R}=\hat{p}R,\\
&\tilde{\alpha}^2=\alpha^2+\beta^2,\ \tilde{c}=c,\ \tilde{\alpha}\tilde{R}=\alpha R,
\end{aligned}\right\}\tag{16.7}$$

則得

$$\left.\begin{aligned}
&i\tilde{\alpha}\tilde{u}+D\tilde{v}=0,\\
&\left[\frac{1}{\tilde{R}}(D^2-\tilde{\alpha}^2)-i\tilde{\alpha}(U-\tilde{c})\right]\tilde{u}=(DU)\tilde{v}+i\tilde{\alpha}\tilde{p},\\
&\left[\frac{1}{\tilde{R}}(D^2-\tilde{\alpha}^2)-i\tilde{\alpha}(U-\tilde{c})\right]\tilde{v}=D\tilde{p}.
\end{aligned}\right\}\tag{16.8}$$

这和(16.6)是同形状的，由变换(16.7)所定义的帶波綫(～)的量，应該表示和三維扰动等价的二維扰动。而且有 $\tilde{\alpha}>\alpha$, 于是 $\tilde{R}<R$, 所以等价的二維扰动实际上相当于小 Reynolds 数所引起的扰动。在此我們的目的仅是求临界 Reynolds 数，故只对二維扰动作計算

❶ 原书中誤写第三个等式为 $\tilde{\alpha}\tilde{p}=\alpha\hat{p}$.——校者注

就行了(Squire, 1933)。

若将$\eta$的未知函数写为$f(\eta)$，則(16.6)第一式可由

$$\hat{u}=Df,\quad \hat{v}=-i\alpha f \tag{16.9}$$

而得到满足。若将此式代入到由第二式及第三式消去$\hat{p}$而得的关系式内，就得到决定$f$的微分方程

$$[(U-c)(D^2-\alpha^2)-D^2U]f=\frac{1}{i\alpha R}(D^4-2\alpha^2D^2+\alpha^4)f. \tag{16.10}$$

其边界条件是

$$\eta=\pm1:\quad f=Df=0. \tag{16.11}$$

(16.10)对于$\eta$是对称的，所以$f$可表示为奇数部分$f_0$及偶数部分$f_e$的和，$f_0$及$f_e$各个独立地满足条件(16.11)。于是$f_0$及$f_e$都是特征函数，它們允許个别地加以考慮。对于奇数部分又必須满足条件

$$\eta=0:\quad Df_0=D^3f_0=0,$$

所以作为$\eta$的变域，可用$(-1, 0)$代替$(-1, 1)$。利用边界条件

$$\left.\begin{aligned}\eta=\eta_1=-1:&\quad f=Df=0,\\ \eta=\eta_2=0:&\quad Df=D^3f=0\end{aligned}\right\} \tag{16.12}$$

就行了。对于偶数部分，改写(16.12)的第二个条件为

$$\eta=0:\quad f=D^2f=0$$

就好了。这样一来，在现在的問題里就只須考慮$U(=1-\eta^2)$的单調增加的变域。

若設(16.10)的四个特解是$f_1, f_2, f_3, f_4$，則一般解为

$$f=c_1f_1+c_2f_2+c_3f_3+c_4f_4. \tag{16.13}$$

利用边界条件(16.12)可得关于$c_1, c_2, c_3, c_4$的齐次方程，令它的系数行列式等于零，則得特征方程

$$F(\alpha, c;\ R)=0. \tag{16.14}$$

在此若特别考虑$c_i=0$的情形，就导出中立稳定性的波数$\alpha$和

Reynolds 数 $R$ 間的关系。今后將就 $c=c_r$ 进行討論。

使不稳定发生的 Reynolds 数都是很大的，所以 Heisenberg (1924) 使用对于 $\alpha R$ 的大值成立的漸近展开。最自然的方法是假定下列形式的展开

$$f=\phi^{(0)}(\eta)+(\alpha R)^{-1}\phi^{(1)}(\eta)+\cdots, \tag{16.15}$$

則 $\phi^{(0)}$ 是將(16.10)右边設为 0 而得的对于非粘性流体方程

$$[(U-c)(D^2-\alpha^2)-D^2U]f=0 \tag{16.16}$$

的解。这个方程早由 Rayleigh(1880)研究过，在本問題的 $\eta$ 的变域内，若 $D^2U$ 不变符号，則必有 $c_i=0$. 又若 $c_i=0$, 于是 $c=c_r$ 时，$U_{\min}<c<U_{\max}$，也就是在流內使 $U=c$ 的点必然存在，以上这几点也都已經証明了(Rayleigh 定理)❶。若命 $U=c$ 的点是 $\eta=\eta_c$，則在現在的問題里就有 $\eta_c=-\sqrt{1-c}$, 这个点是(16.16)的确定的奇点，按照 Heisenberg 的作法，假定解的形狀是

$$f(\eta)=(U-c)[p_0(\eta)+\alpha^2 p_1(\eta)+\cdots], \tag{16.17}$$

代入到(16.16)里得到

$$\left.\begin{gathered} p_{n+1}(\eta)=\int_{-1}^{\eta}(U-c)^{-2}d\eta\int_{-1}^{\eta}(U-c)^2 p_n(\eta)d\eta \\ (n=0,\ 1,\ \cdots), \end{gathered}\right\} \tag{16.18}$$

但

$$p_0(\eta)=1, \tag{16.19}$$

或

$$p_0(\eta)=\int_{-1}^{\eta}(U-c)^{-2}d\eta. \tag{16.20}$$

利用(16.19)所得的解記为 $f_1(\eta)$，利用(16.20)的解記为 $f_2(\eta)$，按照 Tollmien(1929)的方法將(16.16)的解表示成 $\eta-\eta_c$ 的冪級数，便得到

---

❶ 反之，$D^2U$ 变符号一事，是增加扰动发生 ($c_i>0$) 的充要条件(Tollmien, 1935)。

$$\left.\begin{aligned} f_1(\eta)&=(\eta-\eta_c)[a_0+a_1(\eta-\eta_c)+\cdots],\\ f_2(\eta)&=1+b_1(\eta-\eta_c)+\cdots+\frac{U_c''}{U_c'}f_1(\eta)\ln(\eta-\eta_c)\end{aligned}\right\}\qquad(16.21)$$

($U_c'$ 及 $U_c''$ 是 $DU$ 及 $D^2U$ 在 $\eta=\eta_c$ 的值)。$f_2$ 在 $\eta=\eta_c$ 有对数奇点,所以必須适当地选取分支。換言之,$\eta=\eta_c$ 对于最初的方程(16.10)是正則点,所以解应該是單值的,$f_2$ 的无数个分支中正确的一个必須是与(16.10)的当 $\alpha R$ 无限增大时的极限的解相对应的分支。特别是,只考慮(16.16)是不可能决定这个对应的。

$f_2$ 具有对数奇点一事,用物理学的語言来説,就意味着:将同一流体微团不断地放置在同一压力場内,其振幅就显著地增大。在这种点的附近,不允許使用略去粘性的方程(16.16)。在該处設 $\eta-\eta_c=\varepsilon\zeta$,且将 $\varepsilon$ 看成小量而 $\zeta$ 却是一般的大量,又将(16.10)的两边的最高阶的項 $(U-c)D^2f$ 和 $D^4f/i\alpha R$ 作比較。若該二項是同量級的,則 $\varepsilon$ 必須是 $(\alpha RU_c')^{-\frac{1}{3}}$ 的量級。因此从新設

$$\varepsilon=(\alpha R)^{-\frac{1}{3}},\quad \zeta=(\eta-\eta_c)/\varepsilon,$$

且假定

$$f=\Phi^{(0)}(\zeta)+\varepsilon\Phi^{(1)}(\zeta)+\cdots\qquad(16.22)$$

而将它代入(16.10),再比較 $\varepsilon$ 的冪的所有系数,就得到四个特解,其每个都含有 $\frac{1}{3}$ 阶的 Hankel 函数 $H_{1/3}^{(1)(2)}\left[\frac{2}{3}(i\varkappa\zeta)^{\frac{3}{2}}\right]$,但 $\varkappa=(U_c')^{\frac{1}{3}}$。第0阶近似❶由

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_1^{(0)}=\zeta,\ \Phi_2^{(0)}=1,\\ &\Phi_{3,4}^{(0)}=\int_{\pm\infty}^{\zeta}d\zeta\int_{\pm\infty}^{\zeta}d\zeta\zeta^{\frac{1}{2}}H_{1/3}^{(1)(2)}\left[\frac{2}{3}(i\varkappa\zeta)^{\frac{3}{2}}\right]\end{aligned}\right\}\qquad(16.23)$$

所給出。使用 Hankel 函数的漸近展开,且在

$$-\frac{7}{6}\pi<\arg(\varkappa\zeta)<\frac{1}{6}\pi\qquad(16.24)$$

❶ 对应的0阶近似的方程为 $i\Phi^{(0)''}+U_c'3\Phi^{(0)''}=0$。——校者注

的限制下进行近似，则得❶

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_1^{(0)}+\varepsilon\Phi_1^{(1)}\sim\zeta+\varepsilon\frac{U_c''}{2U_c'}\zeta^2+\cdots,\\
&\Phi_2^{(0)}+\varepsilon\Phi_2^{(1)}\sim 1+\varepsilon\frac{U_c''}{U_c'}\zeta\ln\zeta+\cdots,\\
&\Phi_3^{(0)}\sim\text{常数}\cdot\zeta^{-\frac{5}{4}}\exp\left[\frac{2}{3}(\varkappa\zeta)^{\frac{3}{2}}e^{\frac{5}{4}\pi i}\right],\\
&\Phi_4^{(0)}\sim\text{常数}\cdot\zeta^{-\frac{5}{4}}\exp\left[\frac{2}{3}(\varkappa\zeta)^{\frac{3}{2}}e^{\frac{1}{4}\pi i}\right],
\end{aligned}\right\} \tag{16.25}$$

最初两个是相当于 (16.21) 的 $f_1$ 及 $f_2$，其次两个相当于由略去粘性 ($\alpha R\to\infty$) 而失掉的解❷。条件 (16.24) 表示两种 Hankel 函数的漸近展开的共同区域，但在现在的問題里，$c$ 是实数，这个区域必須包括 $\varkappa\zeta$ 的实軸。也就是說，$U_c'>0$ 时由 $\eta>\eta_c$ 到 $\eta<\eta_c$ 的区域的开拓，非經过复数 $\eta$ 平面的下半面实行不可。于是若用 (16.21) 时，在 $f_2$ 右边最后出現的項，当 $\eta>\eta_c$ 时有必要采用 $(U_c''/U_c')f_1\ln(\eta-\eta_c)$，当 $\eta<\eta_c$ 时有必要采用 $(U_c''/U_c')f_1[\ln|\eta-\eta_c|-i\pi]$。若使用 (16.17) 时则 (16.18) 与 (16.20) 的积分必須沿着 $\eta$ 平面的实軸来作，在 $\eta=\eta_c$ 的周圍非通过实軸的下方不可。这样作，就可以正确决定分支 (Tollmien, 1929)。

作为 (16.13) 的特解，可取 (16.17) 或 (16.21) 作为 $f_1$ 及 $f_2$，而以 (16.23) 的 $\Phi_3^{(0)}$ 稍微加以变化后作为 $f_3$，

$$f_3=\int_\infty^\zeta d\xi\int_\infty^\xi d\xi\,\xi^{\frac{1}{2}}H_{1/3}^{(1)}\left[\frac{2}{3}(i\xi)^{\frac{3}{2}}\right], \tag{16.26}$$

但用

$$\xi=\varkappa\zeta=(\alpha RU_c')^{\frac{1}{3}}(\eta-\eta_c) \tag{16.27}$$

---

❶ 詳見 C. C. Lin (1945～1946) 的文章。——校者注

❷ Heisenberg 为了找到这个被丢掉的解，假定 $f=\exp[\mp(\alpha R)^{\frac{1}{2}}Q(\eta)][q_0(\eta)+(\alpha R)^{-\frac{1}{2}}q_1(\eta)+\cdots]$ 的形状，将它代入到 (16.10) 里而决定 $Q, q_0, q_1, \cdots$。公式 (16.25) 的 $\Phi_3^{(0)}$ 及 $\Phi_4^{(0)}$ 是相当于在 Heisenberg 的这个解内設 $U-c=U_c'(\eta-\eta_c)$ 而得的。

代替了变数 $\zeta$. 因为 $\Phi_4^{(0)}$ 是按指数函数发散的，所以可設 $C_4=0$. 也就是說，一般解是由滿足(16.16)的非粘性解 $f_1$, $f_2$ 与滿足(16.10)的粘性解 $f_3$ 的組合

$$f=C_1f_1+C_2f_2+C_3f_3 \tag{16.28}$$

表示出来的。在普通情形，$\eta=\eta_c$ 是离壁面($\eta=\eta_1$)近的，所以 $f_3$ 在壁面和 $f_1$, $f_2$ 是同量級的，但对于其他边界($\eta=\eta_2$)它却是可以略去的小量。换言之，粘性解是为了抵消非粘性解在壁面上所生的滑动而采用的，在离开壁面的地方仅用非粘性解。这样，将边界条件用于(16.28)就得到

$$\frac{f_1(\eta_1)f_2'(\eta_2)-f_2(\eta_1)f_1'(\eta_2)}{f_1'(\eta_1)f_2'(\eta_2)-f_2'(\eta_1)f_1'(\eta_2)}=\frac{f_3(\eta_1)}{f_3'(\eta_1)}. \tag{16.29}$$

在此式左側使用(16.17)，右側利用(16.26)就得到

$$\frac{1+A[1+cU_c'f_2'(\eta_2)/f_1'(\eta_2)]}{(1+A)[1+cU_c'f_2'(\eta_2)/f_1'(\eta_2)]}$$
$$=1-\frac{\int_\infty^{\xi_1}d\xi\int_\infty^{\xi}d\xi\,\xi^{\frac{1}{2}}H_{1/3}^{(1)}\left[\frac{2}{3}(i\xi)^{\frac{3}{2}}\right]}{\xi_1\int_\infty^{\xi_1}d\xi\,\xi^{\frac{1}{2}}H_{1/3}^{(1)}\left[\frac{2}{3}(i\xi)^{\frac{3}{2}}\right]}. \tag{16.30}$$

这里 $1+A=U_1'(\eta_c-\eta_1)/c$ ❶, $\xi_1=(\alpha RU_c')^{\frac{1}{3}}(\eta_1-\eta_c)$，在现在的問題里 $\eta_c=-\sqrt{1-c}$, $\eta_1=-1$, $\eta_2=0$, $U_c'=2\sqrt{1-c}$, $U_1'=2$. 今(16.30)的左边是 $\alpha$ 及 $c$ 的函数，右側是 $\alpha R$ 与 $c$ 的函数，所以由此消去 $c$，就求得 $\alpha$ 和 $R$ 的关系；若消去 $\alpha$ 就得到 $c$ 与 $R$ 的关系。

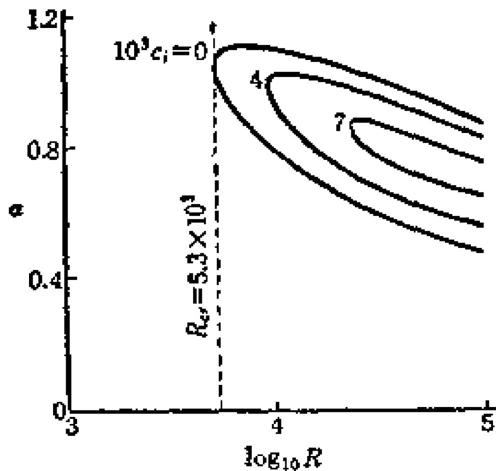


图 16.1

图 16.1 中 $c_i=0$ 的曲綫，表示 Lin (1945) 所算出的对于中立

❶ 原书中誤写为 $1+A=cU_1'(\eta_c-\eta_1)$.——校者注

稳定的 $\alpha$ 与 $R$ 間的关系。非粘性解是采用的(16.17)。又 $c_i>0$ 的曲綫是由 $c_i=0$ 的情形經过攝动而計算出来的(Shen, 1954)。由这些結果可知,临界 Reynolds 数,就是 Reynolds 数的这样的临界值,对于比它小的所有数的微小扰动都是衰减的,它的值是 $5.3\times10^3$。对于临界值以上的 Reynolds 数,在波数 $\alpha$ 的某个范圍内的扰动可以是增大的。

平行壁間的流的稳定性是长期間爭論的中心問題。Heisenberg(1924)大体上是用与上述同样的方法将問題解出,得到对于大 Reynolds 数大概能产生不稳定的結果,但实际上并未能决定临界 Reynolds 数的值。在另一方面,也有不少的人认为不管 Reynolds 数取怎样大的值,这个流也是稳定的。这种事态直到 Tollmien (1929)用大致相同的方法处理边界层的流,具体地决定临界 Reynolds 数值后还继續存在着。Heisenberg 的理論所以不能接受的一个理由,是其漸近展开的方法不够明确,另一个理由是若完全略去粘性($R\to\infty$)这个流是稳定的(Rayleigh 定理)。这是不能找到和 Reynolds 数变大而产生不稳定的結論相調和的說明以后才得出的。此后 Lin (1945) 就漸近展开的方法作了詳細討論,闡明了 Heisenberg 方法可以有效地使用。利用电子計算机作数值积分的結果,也支持了这个結論(Thomas, 1953)。第二个理由是由于不能正确理解粘性所具有的两个作用,也就是在普通考虑的衰减外,反过来还有帮助不稳定的效果。按照詳細計算結果,Reynolds 数超过某一值时流就变成不稳定的,Reynolds 数再继續增大时,能看出不稳定范圍却随 Reynolds 数而减少。正因如此,可以說現在已經能够将 Heisenberg 的功績給以正确的評价了。特别是,我們之所以能够达到图 16.1 所指出的結果,不能不举出由于 Tollmien 对于边界层的考察而使用展开式(16.22)以及 Lin 利用詳細的数学理論提高計算精密度的功績。特别地,

(16.22)的展开是重要的，利用它可在$U=c$的点决定正确的分支，这个結果使得具体地决定临界 Reynolds 数的可能得以实现。至于平行壁間的流其边界条件在数学上是簡单的，但实驗的实现却是极困难的。将图 16.1 所指出的关系进行实驗的討論，直到现在还未成功。

## §17 边界层的流的稳定性

沿着平面壁的边界层的流，严格地說来并不是平行流。取平行于壁的主流方向为$x$軸，垂直于壁面取$y$軸，平行于壁面垂直于主流的方向取为$z$軸时，速度分量$\bar{u}$不仅在$y$方向而且也在$x$方向变化，并且还存在着其他速度分量$\bar{v}$。然而按§8所述，$x$方向的变化比$y$方向的变化小，且$\bar{v}$比$\bar{u}$也小，所以在考虑流的稳定性时，将它看成近似的平行流也无多大关系。也就是說，边界层的厚度$\delta$在$x$方向不变；而速度分布在任何断面都相同，这就可以看作定常解是由

$$\bar{u}=\bar{u}_1 U\left(\frac{y}{\delta}\right), \quad \bar{v}=\bar{w}=0 \tag{17.1}$$

給出的平行流。設壁面用$y=0$表示，$u_1$表示边界层外侧$(y=\delta)$的速度。如以后所述，利用这个假定所作的关于稳定性的計算，和实际在边界层的观察結果很能符合，所以可想象对于微小扰动，由边界层厚度变化所产生的影响大概是很小的。

这样一来，可以和前节所說平行壁間的流同样来討論边界层的流的稳定，只須将原点取在壁面上，对于速度分布$\bar{u}(y)$用(17.1)代替(16.1)，用厚度$\delta$代替平行壁間隔的一半$b$就行了$(\eta=y/\delta)$。在这样理解下，(16.3)，(16.4)，(16.6)，(16.9)，(16.10)等可照样搬来使用。則(16.10)的解可用(16.28)給出来。只是在$y=0$ $(\eta=\eta_1=0)$的边界条件用(16.12)的第一个条件$f=Df=0$給出；

但在 $y=\delta(\eta=\eta_2=1)$的条件，由于缺少对称条件就不能用(16.12)的第二个条件了。在 $y=\delta$ 处可以忽視(16.28)的 $f_3$，而 $f_1$ 及 $f_2$ 是略去粘性的方程(16.16)的解，但这个方程在 $y=\delta$ 附近可用 $(D^2-\alpha^2)f=0$ 作近似。在方程的解里，当 $\eta\to\infty$ 时保持有界的解是 $f=\exp(-\alpha\eta)$，对于它有

$$(D+\alpha)f=0, \tag{17.2}$$

所以在 $\eta=\eta_2$ 的条件采用(17.2)就行了。

Tollmien(1929)就是这样决定沒有压力梯度的边界层的中立稳定($c_i=0$)的关系，Schlichting(1933, 1935)借助于从 $c_i=0$ 情形的摄动計算，研究了增大扰动($c_i>0$)的性质。在这个情形設(17.1)的速度分布为 $U(\eta)$，将(9.3)的 $\frac{1}{2}f'$ 例如用

$$\left.\begin{aligned}&0\leqslant\eta\leqslant0.175:\quad U=1.68\eta,\\&0.175\leqslant\eta\leqslant1.015:\quad U=1-(1.015-\eta)^2,\\&1.015\leqslant\eta:\quad U=1\end{aligned}\right\} \tag{17.3}$$

来作近似❶。对于(16.28)的 $f_1$ 及 $f_2$ 采用(16.21)。其后 Lin(1945)重复作同样計算，对于 $f_1$ 及 $f_2$ 采用 Heisenberg 的解(16.17)代替(16.21)，求得精密度較高的中立稳定的曲綫。Shen(1954)又将 Lin 的計算推广，用摄动法作增大扰动的計算。图 17.1 的綫，按照 Shen 的計算，将中立稳定的扰动的振动数

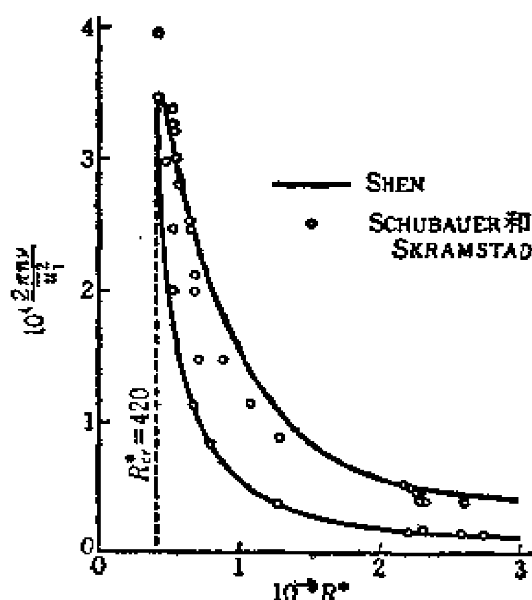



图 17.1

❶ 在此使用的記号 $\bar{u}$ 及 $\bar{u}_1$ 相当于 §9 的 $u$ 及 $u_1$.

$$n=\alpha c_r\bar{u}_1/2\pi\delta^*,$$

用边界层的排除厚度$\delta^*$及外侧速度$\bar{u}_1$的Reynolds数$R^*=\bar{u}_1\delta^*/\nu$的函数表示出来。依据这个結果，临界Reynolds数是$R^*_{cr}=420$，但由Tollmien及Schlichting的計算所得的临界Reynolds数却各为420及575。又在图内的小白圈表示Schubauer及Skramstad(1943)給予沿着平板的边界层特定振动数的微小扰动，而观察它不增不减地傳播到下流的状态时所得的結果。这个实驗結果很能和Shen的計算符合。

当Reynolds数超过临界值时，某个波数(或振动数)的范圍的扰动可以是增大的，此乃稳定理論的重要結論，所以Tollmien曾继續尝試要給以实驗的討論，然結果和預期相反，并未表明这一点。因此，将边界层的流看作可用平行流作近似，甚至将由层流到紊流的轉变在稳定理論里作处理的妥当性等等，也都由这个結果而发生疑問。但在二次世界大战期間，由Schubauer及Skramstad对于边界层外流的小变动的状态所作实驗的結果，闡明了現象的本质是由于变动的作用而隐蔽起来。图17.1所示的测定值是在边界层外的速度变动是平均速度的大約0.1%以下的状态时所观察到的結果。若速度变动在0.2%以上时扰动有选擇地增大的現象就早已看不出来了。

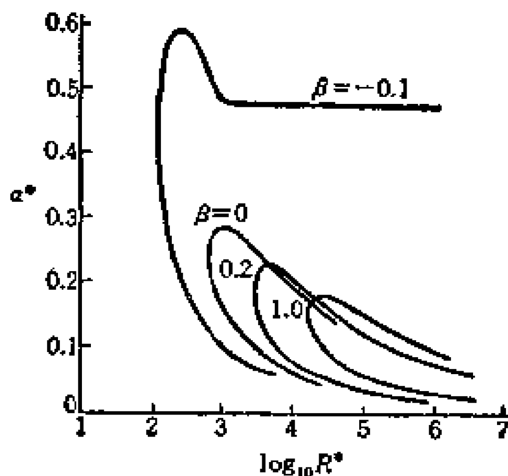


图 17.2

对于有压力梯度的边界层的速度分布，也可作同样計算。图17.2是根据Pretsch(1941)的計算結果，表示出对于§9，2)的种种速度分布(图9.4)中立稳定的$\alpha^*$和$R^*$間的关系。$\alpha^*=(\delta^*/\delta)\alpha$是对于$x$方向的长度$2\pi\delta^*$的

波数，$R^*$ 是关于 $\delta^*$ 及边界层外侧速度 $\bar{u}_1$ 的 Reynolds 数。和沒有压力梯度($\beta=0$)的情形比起来，压力下降的情形($\beta>0$)的临界 Reynolds 数增加，压力上升的情形($\beta<0$)却減小。又在压力下降(包括压力一定)的情形，当 Reynolds 数十分大时有选擇地增大的波数的范圍随 Reynolds 数的增加而縮小，但在压力上升的情形却看不到这种傾向，即使在 Reynolds 数无限增大的情況，也显示出某些有限的波数范圍的扰动可以是增大的。这个事实，和使用略去粘性的方程 (16.16)，考慮在 Reynolds 数无限增大的极限的稳定时，若速度分布如图 9.4 的 $\beta\geqslant 0$ 的曲綫那样，当二阶导数的符号不变时是稳定的，象 $\beta<0$ 的曲綫那样具有屈曲点时是不稳定的結論(Rayleigh 定理)完全一致。又在图 18.1 的曲綫里，对应于 $M=0$ 的曲綫是将临界 Reynolds 数 $R^*_{cr}$ 用表示压力梯度的参数 $\Lambda^*=-(\delta^{*2}/\mu\bar{u}_1)(d\bar{p}_1/dx)=(\delta^{*2}/\nu)(d\bar{u}_1/dx)$ ❶ 的函数表示出来的結果。图 17.2 中除去所指出的 Pretsch 的計算(实綫)以外，还包括用改良了的 Pohlhausen 解法(参照 §10)所得的速度分布而作的計算(虛綫; Schlichting 及 Ulrich, 1942)。两者不完全一致，平板边界层($\Lambda^*=0$)的临界 Reynolds 数各为 660 及 645，和前边所說 Shen 及 Lin 的結果不一致，这大概是由于和前边的計算比起来，精密度还不够的原故。

壁面不是平面，而有弯曲时，若将上边所考慮的"行进扰动"(16.3) 当作对象，則弯曲的影响很小。因为在普通出現的弯曲的情形里，速度分布 $\bar{u}(y)$ 和平面壁的情形比起来只不过有很小的变动。但在考慮三維的"留駐扰动"时，弯曲的影响就明显地表現出来，但只当壁面有負曲率(向外凹)时，才和旋轉圓筒間的流(§15)有同样不稳定的現象发生(Görtler, 1940～1941)。

今設定常解由(17.1)及(17.3)給出，只是由于弯曲而有压力

❶ 参照 §10，但此处所用記号 $\bar{u}_1$ 相当于 §10 的 $u_1$. 在压力上升时 $\Lambda^*<0$.

梯度

$$\partial\bar{p}/\partial y=\rho\varkappa\bar{u}^2 \tag{17.4}$$

存在(参照(8.14))。$\varkappa$ 是壁面的曲率,当向外凸时是正的,且在 $z$ 方向❶不变。也就是将壁面看作母綫平行于 $z$ 軸的圓柱面。由于弯曲的影响,在(14.2),(14.6)及(14.9)的第二式($i=2$)的左侧各追加上 $-\varkappa u_1^2$, $-\varkappa\bar{u}_1^2$ 及 $-2\varkappa\bar{u}_1u_1'$。用边界层的厚度 $\delta$ 及外側流的速度 $\bar{u}_1$ 各代替平行壁間的流(§16)的間隔的一半及中心速度,$\eta$, $\zeta$, $\tau$, $U$ 及 $R$ 各按(16.2)的定义,又假定在 $z$ 方向的周期扰动的形式为

$$\left.\begin{aligned}u'&=\bar{u}_1\hat{u}(\eta)\exp(i\beta\zeta+\sigma\tau),\\v'&=\bar{u}_1\hat{v}(\eta)\exp(i\beta\zeta+\sigma\tau),\\w'&=\bar{u}_1\hat{w}(\eta)\exp(i\beta\zeta+\sigma\tau),\\p'&=\rho\bar{u}_1^2\hat{p}(\eta)\exp(i\beta\zeta+\sigma\tau).\end{aligned}\right\} \tag{17.5}$$

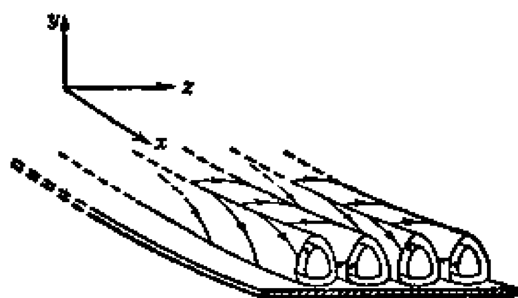



图 17.3

和旋轉圓筒的流的情形里假定的形式(15.7)完全一样,这个扰动是具有平行于主流的軸的有規律的渦如图 17.3。将其代入到(14.8)及(14.9)(但第二式左边是加上 $-2\varkappa\bar{u}u'$ 的)内,則得

$$\left.\begin{aligned}&D\hat{v}+i\beta\hat{w}=0,\\&\left[\frac{1}{R}(D^2-\beta^2)-\sigma\right]\hat{u}=(DU)\hat{v},\\&\left[\frac{1}{R}(D^2-\beta^2)-\sigma\right]\hat{v}=D\hat{p}-2\varkappa\delta U\hat{u},\\&\left[\frac{1}{R}(D^2-\beta^2)-\sigma\right]\hat{w}=i\beta\hat{p}\end{aligned}\right\} \tag{17.6}$$

---

❶ 原书誤为“在 $x$ 方向不变”。——校者注

$(D=d/d\eta)$。自它們中間消去 $\hat{w}$ 及 $\hat{p}$ 时,得到关于 $\hat{u}$ 及 $\hat{v}$ 的方程

$$\left.\begin{aligned}&(D^2-\beta^2-\sigma R)\hat{u}=R(DU)\hat{v},\\&(D^2-\beta^2-\sigma R)(D^2-\beta^2)\hat{v}=2R\varkappa\delta\beta^2U\hat{u}.\end{aligned}\right\}\qquad(17.7)$$

其边界条件是

$$\left.\begin{aligned}&\eta=0:\quad \hat{u}=\hat{v}=D\hat{v}=0,\\&\eta=\infty:\quad \hat{u}=\hat{v}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(17.8)$$

Görtler 将这个特征值問題当作积分方程問題来处理,求得給出中立稳定($\sigma=0$)的 Reynolds 数和波数間的关系。$U$ 采用(17.3)所給出的值。特征值的存在只限于 $\varkappa<0$ 的情形(凹面),而且 $\varkappa$ 出現于 Reynolds 数及 $R\sqrt{-\varkappa\delta}$ 的結合里。在图 17.4 中采用以排除厚度 $\delta^*$ 代替 $\delta$ 时的 Reynolds $R^*=\bar{u}_1\delta^*/\nu$, 又采用关于长度 $2\pi\delta^*$ 的波数 $\beta^*=(\delta^*/\delta)\beta$ 代替 $\beta$, 将 $R^*\sqrt{-\varkappa\delta^*}$ 表示为 $\beta^*$ 的函数。$R^*\sqrt{-\varkappa\delta^*}$ 超过这个限界时,扰动就出現增大,所以临界 Reynolds 数 $R^*_{cr}$ 相当于曲綫的最低点的条件,由 $R^*_{cr}\sqrt{-\varkappa\delta^*}=2.4$ 給出。若 $-\varkappa\delta^*=0.1$,則有 $R^*_{cr}=7.6$,但这个值比平面壁的临界值 420 (图 17.1)小得多。也就是說,由于很小的凹面的影响,对于小 Reynolds 数就已发生了图 17.3 那样的渦。

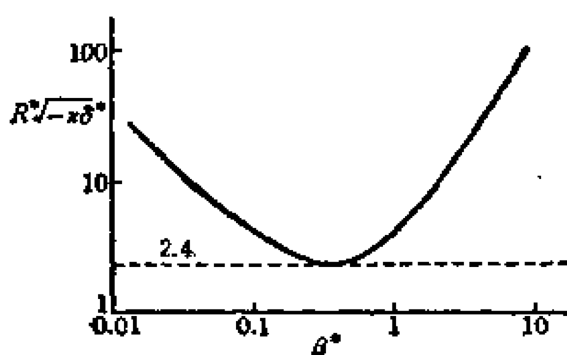


图　17.4

## §18　边界层的流的稳定性(压縮性流体的情形)

在前面四节里,都是讲的沒有必要考虑压縮性影响的情形。为了研究压縮性流体的层流的稳定,使用連續方程(1.2)及运动方程(1.13)里略去外力而得的方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)=0, \tag{18.1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p+\frac{2}{3}\mu\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right], \tag{18.2}$$

作为能量方程(1.15)及状态方程(1.1)也必須采用

$$\rho\left(\frac{\partial E}{\partial t}+u_j\frac{\partial E}{\partial x_j}\right)=-p\frac{\partial u_j}{\partial x_j}+\mu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$
$$-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)^2+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x_j}\right), \tag{18.3}$$

$$p=\Re\rho T. \tag{18.4}$$

記号和 § 14 同样,至于其他新記号則用温度 $T$, 气体常数 $\Re$, 内部能量 $E$, 热傳导系数 $\lambda$, 粘性系数 $\mu$. 在此情形不仅速度及压力,而且温度和密度也是变化的,将这些量都分解为定常解及扰动如下:

$$\left.\begin{array}{l} u_i=\bar{u}_i+u_i', \ p=\bar{p}+p', \ T=\bar{T}+T', \\ \rho=\bar{\rho}+\rho', \ \mu=\bar{\mu}+\mu', \ \lambda=\bar{\lambda}+\lambda', \end{array}\right\} \tag{18.5}$$

将它們代入到上边四个方程里,且略去扰动的二次以上的項。和前二节同样,考慮定常解仅为 $x_2$ 的函数的平行流 $(\bar{u}_2=\bar{u}_3=0)$, 則用边界层作近似, $x_1$ 及 $x_3$ 方向的变化比 $x_2$ 方向的变化小得多而可以略去。又对于理想气体,定容比热 $c_v$ 不因温度而变化。設 $E=c_vT$ 时,則得扰动所应該滿足的方程如下:

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t}+\bar{u}_1\frac{\partial\rho'}{\partial x_1}+u_2'\frac{d\bar{\rho}}{dx_2}=-\bar{\rho}\frac{\partial u_j'}{\partial x_j}, \tag{18.6}$$

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial t}+\bar{u}_1\frac{\partial u_i'}{\partial x_1}+u_2'\frac{du_i}{dx_2}\right)=-\frac{\partial p'}{\partial x_i}+\bar{\mu}\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_2^2}, \tag{18.7}$$

$$\bar{\rho}c_v\left(\frac{\partial T'}{\partial t}+\bar{u}_1\frac{\partial T'}{\partial x_1}+u'_2\frac{d\bar{T}}{dx_2}\right)=-\bar{p}\frac{\partial u'_i}{\partial x_i}+\bar{\lambda}\frac{\partial^2 T'}{\partial x_2^2}, \quad (18.8)$$

$$\frac{p'}{\bar{p}}=\frac{\rho'}{\bar{\rho}}+\frac{T'}{\bar{T}}. \quad (18.9)$$

这里变更一下記号,将$(x_1, x_2, x_3)$及$(u_1, u_2, u_3)$各写成$(x, y, z)$及$(u, v, w)$,用边界层的厚度$\delta$、边界层外側的速度$\bar{u}_1$及密度$\bar{\rho}_1$等定义无因次量❶

$$\xi=\frac{x}{\delta},\ \eta=\frac{y}{\delta},\ \zeta=\frac{z}{\delta},\ \tau=\frac{\bar{u}_1 t}{\delta},\ R=\frac{\bar{\rho}_1\bar{u}_1\delta}{\bar{\mu}_1}. \quad (18.10)$$

$$U=\frac{\bar{u}}{\bar{u}_1},\ V=\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_1},\ W=\frac{\bar{\mu}}{\bar{\mu}_1},\ \Theta=\frac{\bar{T}}{\bar{T}_1}, \quad (18.11)$$

且假定扰动的形式为

$$\left.\begin{aligned}
u'&=\bar{u}_1\hat{u}(\eta)\exp[i(\alpha\xi+\beta\zeta)-i\alpha c\tau],\\
v'&=\bar{u}_1\hat{v}(\eta)\exp[i(\alpha\xi+\beta\zeta)-i\alpha c\tau],\\
w'&=\bar{u}_1\hat{w}(\eta)\exp[i(\alpha\xi+\beta\zeta)-i\alpha c\tau],\\
p'&=\bar{p}_1\hat{p}(\eta)\exp[i(\alpha\xi+\beta\zeta)-i\alpha c\tau],\\
\rho'&=\bar{\rho}_1\hat{\rho}(\eta)\exp[i(\alpha\xi+\beta\zeta)-i\alpha c\tau],\\
T'&=\bar{T}_1\hat{T}(\eta)\exp[i(\alpha\xi+\beta\zeta)-i\alpha c\tau].
\end{aligned}\right\} \quad (18.12)$$

$\alpha$, $\beta$, 及$c$的意义和(16.3)相同❷。将(18.12)代入到(18.6),(18.7),(18.8),(18.9)里,得到決定扰动振幅分布的常微分方程❸:

---

❶ $\bar{u}_1$及$\bar{p}_1$的下标1意味着边界层外側的值。和此相反,(18.6),(18.7),(18.8)里的$\bar{u}_1$在变更記号后写成$\bar{u}$,因为此时的标数1表示$x_1$軸的方向。

❷ 原书中遺漏了$w'$的表示式。——校者注

❸ 在无必要考慮压縮性时,在(18.13)里設$V=W=\Theta=1$, $\hat{\rho}=\hat{T}=0$就行了。若考虑到在(18.12)及(16.3)里$\hat{p}$的定义不同,且由于边界层近似$\alpha^2+\beta^2$比起$D^2$是可以略去时,就容易看出这样得到的結果和前边的(16.4)完全一致。

$$\left.\begin{aligned}
&-i\alpha(U-c)\hat{\rho}=V(i\alpha\hat{u}+i\beta\hat{w}+D\hat{v})+(DV)\hat{v},\\
&\left[\frac{W}{R}D^2-i\alpha V(U-c)\right]\hat{u}=V(DU)\hat{v}+\frac{i\alpha}{\gamma M^2}\hat{p},\\
&\left[\frac{W}{R}D^2-i\alpha V(U-c)\right]\hat{v}=\frac{1}{\gamma M^2}D\hat{p},\\
&\left[\frac{W}{R}D^2-i\alpha V(U-c)\right]\hat{w}=\frac{i\beta}{\gamma M^2}\hat{p},\\
&\left[\frac{\gamma}{\sigma R}WD^2-i\alpha V(U-c)\right]\hat{T}\\
&\qquad=V(D\Theta)\hat{v}+(\gamma-1)V\Theta(i\alpha\hat{u}+i\beta\hat{w}+D\hat{v}),\\
&\frac{\hat{p}}{V\Theta}=\frac{\rho}{V}+\frac{\hat{T}}{\Theta}.
\end{aligned}\right\}\tag{18.13}$$

这里 $\gamma$ 是比热比 ($=c_p/c_v$, $c_p$ 是定压比热), $\sigma$ 是 Prandtl 数 ($=\mu c_p/\lambda$), 假定它們都不随温度变化。$M$ 是边界层外側流的 Mach 数($=\bar{u}_1/\sqrt{\gamma\Re T_1}$); $D$ 表示对于 $\eta$ 的微分。当壁面是絕热时,則在壁面上的条件为

$$\eta=0:\quad \hat{u}=\hat{v}=\hat{w}=D\hat{T}=0.\tag{18.14}$$

若壁面温度一定时,就用 $\hat{T}=0$ 代替 $D\hat{T}=0$。

若扰动是二維的,在(18.13)里設 $\hat{w}=0$, $\beta=0$ 好了。在另一方面,对于(18.13)施行变换

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{\alpha}\tilde{u}=\alpha\hat{u}+\beta\hat{w},\ \tilde{v}=\hat{v},\ \tilde{p}\tilde{R}=\hat{p}R❶,\\
&\tilde{\alpha}\tilde{\rho}=\alpha\hat{\rho},\ \tilde{\alpha}\tilde{T}=\alpha\hat{T},\ \tilde{\alpha}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2},\\
&\tilde{c}=c,\ \tilde{\alpha}\tilde{R}=\alpha R,\ \tilde{\alpha}\tilde{M}=\alpha M,
\end{aligned}\right\}\tag{18.15}$$

則得

❶ 原书誤写为 $\tilde{\alpha}\tilde{p}=\alpha\hat{p}$。——校者注

$$\left.\begin{aligned}
&-i\alpha(U-\tilde{c})\tilde{\rho}=V(i\tilde{\alpha}\tilde{u}+D\tilde{v})+(DV)\tilde{v},\\
&\left[\frac{W}{\tilde{R}}D^2-i\tilde{\alpha}V(U-\tilde{c})\right]\tilde{u}=V(DU)\tilde{v}+\frac{i\tilde{\alpha}}{\gamma\tilde{M}^2}\tilde{p},\\
&\left[\frac{W}{\tilde{R}}D^2-i\tilde{\alpha}V(U-\tilde{c})\right]\tilde{v}=\frac{1}{\gamma\tilde{M}^2}D\tilde{p},\\
&\left[\frac{\gamma}{\sigma\tilde{R}}WD^2-i\tilde{\alpha}V(U-\tilde{c})\right]\tilde{T}\\
&\qquad=V(D\Theta)\tilde{v}+(\gamma-1)V\Theta(i\tilde{\alpha}\tilde{u}+D\tilde{v}),\\
&\frac{\tilde{p}}{V\Theta}=\frac{\tilde{\rho}}{V}+\frac{\tilde{T}}{\Theta},
\end{aligned}\right\}\qquad(18.16)$$

将扰动归結到和二維情形完全相同的形状。于是由变换(18.15)定义带波綫的量，是表示和已知三維扰动等价的二維扰动。在此設 $\cos\theta=\alpha/\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$，則对应于等价的二維扰动的 Reynolds 数及 Mach 数各为

$$\tilde{R}=R\cos\theta,\quad \tilde{M}=M\cos\theta.\qquad(18.17)$$

这意味着:在处理和 $x$ 軸有傾斜度 $\theta$ 的方向所傳播的扰动时，考慮在 $x$ 方向傳播的二維扰动，而和它对应的 Reynolds 数及 Mach 数，我們取主流的值在傳播方向的正投影就行了。至于速度及其他分布函数 $U$, $V$, $W$, $\Theta$ 等，是采用和 $\theta$ 无关的同一的量，而不能适合变换(18.17)。

在无必要考慮压縮性影响时，变换只是 Reynolds 数自 $R$ 减少到 $\tilde{R}$，而且唯一的分布函数 $U(\eta)$ 却和 Reynolds 数无关。从而等价的二維扰动就表示实际上对于小 Reynolds 数可以发生的扰动，在此意义下，为了决定临界 Reynolds 数，只須对二維扰动进行計算就够了。但在压縮性流体的情形，由于变换而使 Mach 数减小，而 Mach 数的减小又影响到分布函数 $U$, $V$, $W$, $\Theta$，所以由变换作成的对应仅是数学的对应。故在决定临界 Reynolds 数时只考

虑二維扰动($\theta=0$)是不够的，必须求$\theta$自0变到$\frac{\pi}{2}$时，Reynolds数$\tilde{R}$的临界值，由此再計算Reynolds数$R$的临界值，然后找出它的最小值才可以。稳定理論在压縮性流体的推广，最初由Lees及Lin(1946)完成的，但将扰动假定为二維的。三維扰动的計算是Dunn及Lin(1955)作成的。

在(18.16)內消去$\tilde{p}$，且将$\tilde{u}$, $D\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{p}$, $\tilde{T}$及$D\tilde{T}$各看作不同的变数时，它就变成六个一阶微分方程。所以作为边界条件在(18.14)外还須要在边界层外側($\eta=1$)給出对于$\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{T}$的条件来。在边界层外側略去粘性是可能的，使$\tilde{R}\to\infty$而得的$\tilde{v}$的微分方程(非粘性流体的方程)变为

$$\frac{d}{d\eta}\left[\frac{(U-\tilde{c})D\tilde{v}-(DU)\tilde{v}}{\Theta-\tilde{M}^2(U-\tilde{c})^2}\right]=\frac{\tilde{\alpha}^2(U-\tilde{c})}{\Theta}\tilde{v}. \qquad (18.18)$$

这个方程的解对于$\eta$的大値是$\tilde{v}=\exp(\pm A\eta)$，但

$$A^2=\tilde{\alpha}^2[1-\tilde{M}^2(1-\tilde{c})^2]. \qquad (18.19)$$

若

$$\tilde{c}<1-\frac{1}{\tilde{M}}, \qquad (18.20)$$

则$A^2<0$，对于$\eta$的大値的解的有界性自然地被满足。特征値是連續的，扰动的波数及位相速度完全是任意的。这样的扰动叫作“超声速扰动”，由物理学观点看来，表示出入于边界层的声波，可以看作对稳定問題毫无影响的。和此相对着，在

$$\tilde{c}>1-\frac{1}{\tilde{M}} \qquad (18.21)$$

的情形叫作“亚声速扰动”，由于$A^2>0$，扰动的一个在$\eta$的大的地方作指数函数的减少。所以若$A$是(18.19)的正根时，則边界层外側的条件是

$$\eta=1: \quad (D+A)\tilde{v}=0, \qquad (18.22)$$

对于 $\tilde{u}$ 及 $\tilde{T}$ 也有同样条件成立。对于这样的扰动，特征值是不連續的，由特征方程可决定波数及位相速度。使扰动为“亚声速”的 $\tilde{c}$ 的最小値在 $\tilde{M}<1$ 是 0，从而可将所有位相速度的扰动当作对象，但当 $\tilde{M}>1$ 时只考虑比 $1-1/\tilde{M}$ 大的 $\tilde{c}$ 的值就行了。

要进一步推出特征方程

$$F(\alpha,\ c;\ R,\ M)=0 \tag{18.23}$$

的具体形状，由此求得中立稳定給出的 $\alpha$ 和 $R$ 的关系时，和沒有压縮性影响的情形同样进行即可。在离开壁面的地方，用解(18.18)而得的非粘性解，为了抵消壁面的滑动再附加上粘性解。今略去詳細計算，讀者可参考 Dunn 及 Lin 的論文(1955)。

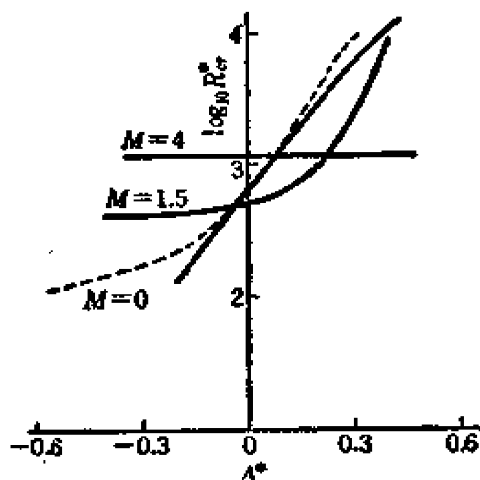



图 18.1

作为計算結果的一个实例，在图 18.1 里表示出取 Mach 数 $M=1.5$ 及 4.0 的边界层时临界 Reynolds 数 $R^*_{cr}$ 按照压力梯度参数 $\Lambda^*$ 而变化的情况(Weil, 1951)。利用边界层的排除厚度 $\delta^*$ 及边界层外侧的速度、压力、密度及粘性系数定义 Reynolds 数 $R^*=\bar{\rho}_1\bar{u}_1\delta^*/\bar{\mu}_1$ 和压力梯度 $\Lambda^*=-(\delta^{*2}/\bar{\mu}_1\bar{u})(d\bar{p}_1/dx)$。只考慮二維扰动时，假定壁面是絕热状态。压力梯度的影响在 $M=1.5$ 时比无压縮性的情形($M=0$)显著得多，但当 $M=4.0$ 时就非常的小了。

关于亚声速扰动的位相速度，其最小值已如上述，但最大值可由特征方程来决定。这个最大值随壁面温度 $\bar{T}_w$ 及外侧温度 $\bar{T}_1$ 的比 $\Theta_w=\bar{T}_w/\bar{T}_1$ 的减小而减小，在 $\Theta_w$ 的某个临界值处有和最小值一致的可能性(Lees, 1947)。将这种情形产生的条件写出来，就一定是

$1<M<M_0$❶，$\theta<\cos^{-1}(1/M)$。这个結論意味着：温度比$\Theta_w$保持在某个临界值以下时，中立稳定的曲綫消失，从而临界 Reynolds 数可以无限大地提高。在图 18.2 里，将这样"完全稳定"的临界温度比用 Mach 数的函数表示出来(Probstein 及 Lin, 1956)。图里的虚綫表示在絕热状态下实現的温度比，所以为了得到完全稳定，表面冷却显然是必要的。若考虑二維扰动($\theta=0$)时，$\theta<\cos^{-1}(1/M)$的条件必然可以满足，但对于三維的扰动，只能是假定仅有满足这个条件的才可以出現。若使$\theta>\cos^{-1}(1/M)$的那样扰动发生时，早已不能得到严格意义的完全稳定，但对于它的临界 Reynolds 数是非常大的。所以由实际意义說来，使壁面降温是保持层流稳定的最有效的手段。而且这个事实也已得到实驗結果的証明。

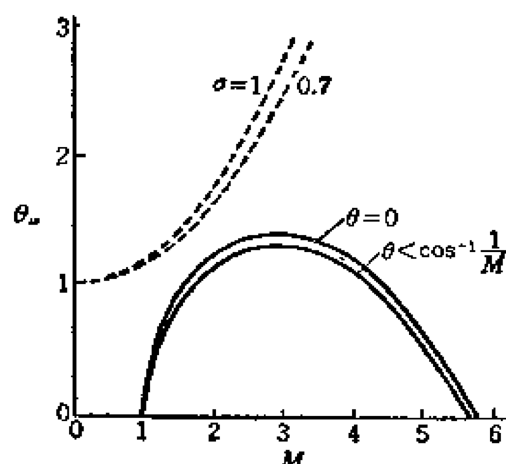


图 18.2

## 参考文献


[1] H. Lamb: Hydrodynamics (Cambridge, 1932).

[2] L. Prandtl: The Mechanics of Viscons Fluids, Durand's Aerodynamics Theory, **3** (Berlin, 1935), 34~208.

[3] S. Goldstein: Modern Developments in Fluid Dynamics, **1**, **2**. (Oxford, 1938).

[4] L. Howarth: Modern Developments in Fluid Dynamics, High Speed Flow, **1**, **2** (Oxford, 1953).


❶ 值$M_0$是和 Prandtl 数$\sigma$及粘性系数随温度变化的假定有关。图 18.2 所示結果是在$\sigma=1$而且$\mu$可假定为(13.12)那样情形下得到的，所以$M_0$的值是 5.74(二維扰动，$\theta=0$)及 5.65(三維扰动，$\theta<\cos^{-1}(1/M)$)。

[5] C. C. Lin: The Theory of Hydrodynamic Stability (Camb.1955).

## 第1章

[6] C. L. M. N. Navier:Mém. Acad. Sci., **6** (1823), 389.
[7] G. Hagen: Pogg. Ann., **46** (1839), 433.
[8] J. L. M. Poiseuille: Comptes Rendus, **11** (1840), 961, **1041**; **12** (1841), 112.
[9] G. G. Stokes: Trans. Camb. Phil. Soc.,**8** (1845), 287.
[10] G. Wiedemann: Pogg. Ann., **99** (1856), 217.
[11] J. C. Maxwell: Phil. Trans. Roy. Soc., A, **170** (1879), 231.
[12] O. Reynolds: Phil. Trans. Roy. Soc., A, **174** (1883), 935.
[13] Lord Rayleigh: Proc. London Math. Soc., [1], **11** (1880), 57; Phil Mag., [6], **21**, (1911), 697.
[14] K. Hiemenz: Dingler's Polytechnic Journal, **326** (1911), 321.
[15] G. B. Jeffery: Phil. Mag., [6], **29** (1915), 455.
[16] G. Hamel: Jber. dtsch. Math. Ver., **25**(1916), 34.
[17] S. Chapman: Phil. Trans. Roy. Soc., A, **216** (1916), 279; **217** (1917), 115.
[18] D. Enskog: Upsala Dissertation, 1917.
[19] J. Leray: J. Math. Pur. Appl., **12** (1933), 1; **13** (1934), 331.
[20] D. Burnett: Proc. London Math. Soc., [2], **40** (1935), 382.
[21] L. Howarth: A. R. C., R. & M., 1632 (1935).
[22] L. Rosenhead: Proc. Roy. Soc., A, **175** (1940), 436.
[23] H. S. Tsien: J. Aero. Sci., **13** (1946), 653.

## 第2章

[24] G. D. Stokes: Trans. Camb. Phil. Soc., **9** (1850), 8.
[25] O. Reynolds: Phil. Trans. Roy. Soc., A, **177** (1886), 159.
[26] C. W. Oseen: Ark. Mat. Ast. Fys., **6** (1910), No. 29.
[27] H. Lamb: Phil. Mag., [6], **21** (1911), 112.
[28] C. W. Oseen: Ark. Mat. Ast. Fys., **9** (1913), No. 16.
[29] W. J. Harrison: Trans. Camb. Phil. Soc., **33**(1924), 71.

[30] L. N. G. Filon: Phil. Trans. Roy. Soc., A, **227** (1928), 93.
[31] S. Goldstein: Proc. Roy. Soc., A, **123** (1929), 216.
[32] A. Thom: A. R. C., R. & M., 1194 (1929).
[33] A. Thom: Proc. Roy. Soc., A, **141** (1933), 651.
[34] S. Goldstein: Proc. Roy. Soc., A, **142** (1933), 563.
[35] 川口光年：东大理工研报告，**2** (1948), 33, 66.
[36] W. Kaulert: Ing. Arch., **16** (1948), 321.
[37] S. Tomotika & T. Aoi: Quart. J. Mech. App. Math., **3** (1950), 140.
[38] I. Imai: Proc. Roy. Soc., A, **208** (1951), 487.
[39] S. Tomotika & T. Aoi: Quart. J. Mech. App. Math., 6 (1953), 290.
[40] M. Kawaguti: J. Phys. Soc. Japan, **8** (1953), 747.
[41] I. Imai: Proc. Roy. Soc., A, **224** (1954), 141.
[42] 桥本英典：第4回应用力学連合讲演会預稿 (1954).
[43] M. Kawaguti: J. Phys. Soc. Japan, **10** (1955), 694.

## 第3章

[44] L. Prandtl: Verh. III. Int. Math. Kongr., Heiderberg, **1904** (1905), 484.
[45] H. Blasius: Z. Math. Phys., **56** (1908), 1.
[46] K. Hiemenz: Dingler's Polytechnic Journal, **326** (1911), 321.
[47] K. Töpfer: Z. Math. Phys., **60** (1912), 397.
[48] E. Pohlhausen: Z. angew. Math. Mech., **1** (1921), 115.
[49] Th. v. Kármán: Z. angew. Math. Mech., **1** (1921), 233.
[50] K. Pohlhausen: Z. angew. Math. Mech., **1** (1921), 252.
[51] V. M. Falkner & S. W. Skan: A. R. C., R. & M., 1314 (1930).
[52] L. Crocco: Rend. R. Acad. Lincei, [6], **14** (1931), 490.
[53] A. Busemann: Z. angew. Math. Mech., **15** (1935), 23.
[54] L. Howarth: A. R. C., R. & M., 1632 (1935).
[55] D. R. Hartree: Proc. Camb. Phil. Soc., **33** (1937), 223.
[56] L. Howarth: Proc. Roy. Soc., A, **164** (1938), 547.
[57] D. R. Hartree: A. R. C., R. & M., 2426 (1939).
[58] 谷一郎：东大航研汇报，245 (1945).

[59] L. Prandtl: Albert Betz Festschrift (1945), 134.

[60] R. T. Jones: N. A. C. A. Tech. Rep., 884 (1947).

[61] W. R. Sears: J. Aero. Sci., **15**(1948), 49.

[62] K. Wieghardt: Ing. Arch., **16**(1948), 231.

[63] W. Mangler: Z. angew. Math. Mech., **28** (1948), 97.

[64] A. Ulrich: Arch. Math., **2**(1949), 33.

[65] I. Tani: J. Phys. Soc. Japan, **4** (1949), 149.

[66] 畑中浩：东大理工研报告，**3**(1949), 115.

[67] 辻広：东大理工研报告，**3**(1949), 239.

[68] K. Stewartson: Proc. Roy. Soc., A, **200**(1949), 84.

[69] D. R. Chapman & M. W. Rubesin: J. Aero. Sci., **16** (1949), 547.

[70] M. J. Lighthill: Phil. Mag., [7], **40**(1949), 1179.

[71] S. F. Shen: J. Math. Phys., **31** (1952), 192.

[72] L. Lees & R. F. Probstein: Princeton Univ., Aero. Engrg. Lab. Rep., 195(1952).

[73] L. Lees: J. Aero. Sci., **20**(1953), 143.

[74] Y. H. Kuo: J. Math. Phys., **32**(1953), 83.

[75] I. Tani: J. Aero. Sci., **21**(1954), 487.

## 第4章

[76] Lord Rayleigh: Proc. London Math. Soc., **11** (1880), 57; **19**(1887), 67.

[77] G. I. Taylor: Phil. Trans. Roy. Soc., A, **223**(1923), 289.

[78] W. Heisenberg: Ann. Phys., [4], **74** (1924), 577.

[79] W. Tollmien: Göttingen Nachr., Math. Phys. Kl.(1929), 21.

[80] H. B. Squire: Proc. Roy. Soc., A, **142**(1933), 621.

[81] H. Schlichting: Göttingen Nachr., Math. Phys. Kl. (1933), 181; (1935), 47.

[82] W. Tollmien: Göttingen Nachr., Math. Phys. Kl. (1935), 79.

[83] H. Görtler: Göttingen Nachr., Math. Phys. Kl.(1940), 1; Z. Angew. Math. Mech., **21**(1941), 250.

[84] J. Pretsch: Jb. dtsch. Luftfahrtforsch. (1941), 1-158.

[85] H. Schlichting u. A. Ulrich: Jb. dtsch. Luftfahrtforsch. (1942), I–8.

[86] G. B. Schubauer & H. K. Skramstad: N. A.C. A., Adv. Conf. Rep., Apr. 1943[=N.A.C.A. Tech. Rep. 909(1948)].

[87] C. C. Lin: Quart. App. Math., **3**(1945~1946), 117, 218, 277.

[88] L. Lees and C. C. Lin: N.A.C.A. Tech. Note 1115(1946).

[89] L. Lees: N.A.C.A. Tech. Rep., 876(1947).

[90] H. Weil: J. Aero. Sci., **18**(1951), 311.

[91] L. H. Thomas: Phys. Rev., [2], **91** (1953), 780.

[92] S. F. Shen: J. Aero. Sci., **21**(1954), 62.

[93] D. W. Dunn & C. C. Lin: J. Aero. Sci., **22**(1955), 455.

[94] R. F. Probstein and C. C. Lin: Inst. Aero. Sci., Reprint 596 (1956).

# 校 后 記

欧阳鬯 張开明

本书扼要地介紹了粘性流体力学的基本理論。在不多的篇幅中广泛地介紹了到現时为止粘性流体力学中最有兴趣的許多問題,同时又对其中某些基本問題和方法进行了比較細致的討論。这是本书的一个特点。本书在一般地介紹粘性流体理論的同时,在內容上偏重于应用数学的观点。如第1章中介紹了粘性流体运动基本方程的适用范圍和某些准确解;第2章研究小 Reynolds 数情形方程的近似解法,以及提高近似程度的方法;第3章討論边界层(或附面层)方程的准确解和近似方法,特别是处理 Reynolds 数不十分大时的高阶近似的郭永怀-Lighthill 方法;第4章是流动稳定性的小扰动理論。这些內容大都成功地运用了数学分析的工具。象本书这样細致地介紹这些內容在目前其他有关粘性流体理論的书籍中还是不多見的。但书中完全略去了粘性流体理論中另一个內容丰富的部門——湍流理論。这对于一本粘性流体的书来說带有一定的局限性。书中对粘性流体基本理論的介紹偏重于不可压縮流体的情形,但同时也对可压縮粘性流体理論发展的一些基本方面作了概略的介紹。如果考虑到目前高速粘性流体理論的日益丰富,作为一本粘性流体力学的专門书籍,这方面还显得有些不足。好在作者在书末列出了相当丰富的参考文献,为讀者进一步了解这些內容提供了一个綫索,也就在一定程度上弥补了这一缺陷。本书由于篇幅关系,对一些問題的叙述不能非常詳細,讀者可参考其他有关书籍。我們认为,苏联作者 Н. Е. Кочин,

И. Л. Кибель 和 Н. В. Розе 著的 "Теоретическая гидромеханика" (理論流体力学)第二卷粘性流体部分可作为这方面較好的参考书。

本书可作为綜合大学或工科大学力学专业流体力学的参考书，也可作为数学专业連續介质力学的补充讀物。

1961 年 12 月于复旦大学数学系